وأحاط بما لديهم وأحصى كل شيء عددا (الجن، 28)

البرهان

في الرياضيات والفيزياء والكيمياء

الأستاذ الدكتور بشير التركي
جامعة تونس

الدكتور خليفة الشبعان
جامعة تونس

الدكتور رضى بوراوي
جامعة تونس

تعليم عالي
السنة الأولى من علم الحياة

الجزء الأول، رياضيات عامة

12، نهج تورات (بلفيدير) تونس - الهاتف: 283.574

الـــرّمـُـــوز

ان الاشارة الحمراء ظ على الغلاف ترمز الى حرف الضاد وهو يدل على لغة الضاد اى اللغة العربية وهى لغتنا الوطنية ولغة العلم المعاصر .

جا : جيب دائري
جتا : جيب تمام دائري
ظا : ظل دائري
ظتا : ظل تمام دائري
جق : جيب قطعي
جتق : جيب تمام قطعي
ظق : ظل قطعي
ظتق : ظل تمام قطعي
خو : خوارزمي
ثا : ثابت
[×] : ضرب شعاعي
س ، ص ، ط : احداثيات نقطة
هـ ، و ، ي : زوايا
$\vec{ج}$ ، $\vec{ح}$ ، $\vec{خ}$: اشعة الوحدات
د : عملية الدوران الاجابي بزاوية قدرها $\frac{\pi}{2}$
غا : تغير المتحول
فا : تفاضل
تف : تفاضل جزئي
كا : تكامل

ونستعمل في هذه الكتب الارقام العربية الغبارية : ٠ ، ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ والارقام العربية الخوارزمية : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 على حد سواء «انظر مجلة العلم عدد 2 صفحة 5 وعدد 16 صفحة 19»

1976 - 1396

الـرّمـوز

ان الاشارة الحمراء ظـ على الغلاف ترمز الى حرف الضاد وهو يدل على

لغة الضاد اى اللغة العربية وهى لغتنا الوطنية ولغة العلم المعاصر .

جا : جيب دائري
جتا: جيب تمام دائري
ظا : ظل دائري
ظتا: ظل تمام دائري
جق: جيب قطعي
جتق: جيب تمام قطعي
ظق : ظل قطعي
ظتق: ظل تمام قطعي
خو : خوارزمي
ثا : ثابت
[x]: ضرب شعاعي
س، ص، ط، احداثيات نقطة
هـ، و، ي : زوايا
$\vec{ج}$، $\vec{ح}$، $\vec{خ}$: اشعة الوحدات
د : عملية الدوران الايجابي بزاوية قدرها $\frac{\pi}{2}$
غا: تغير المتحول
فا: تفاضل
تف : تفاضل جزئي
كا: تكامل

ونستعمل في هذه الكتب الارقام العربية الغبارية: ، ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ والارقام العربية الخوارزمية: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 على حد سواء «انظر مجلة العلم عدد 2 صفحة 5 وعدد 16 صفحة 19»

1976 - 1396

المقدمة

ان هذا الكتاب : « البرهان فى الرياضيات والفيزياء والكيمياء » يحتوى على عشرة اجزاء وهى :

1 ــ رياضيات عامة
2 ــ الاحتمال والاحصاء
3 ــ الحركة
4 ــ الحرارة
5 ــ الكهرطيسية
6 ــ الضوء
7 ــ النواة
8 ــ الكيمياء العامة
9 ــ الكيمياء العضوية
10 ــ الكيمياء المعدنية

وقد كتبناها بعد سبع عشرة سنة تجربة فى التدريس الجامعى وفى البحث العلمى وهى موجهة الى طلبة السنة الاولى فى علم الحياة بكليات العلوم والطب والزراعة والصيدلة ... وقد نسقنا الدروس حسب برامجها على مستوى مناسب كافى لهذه الاختصاصات .

وهذا هو الجزء الاول وهو يحتوى على مبادىء عامة فى الرياضيات وفصوله سبع :

1 ـ موجز فى الجبر وحساب المثلثات والحساب الشعاعى
2 ـ مبادىء عامة فى الدالات
3 ـ الدلات المالوفة
4 ـ الدلات الاسية والخوارزمية
5 ـ المشتقات والنشر المحدود
6 ـ التكامل
7 ـ المعادلات التفاضلية

وقد دعمنا تفسير كل فصل بتمارين سهلة الحل حتى يتمكن الطالب من ادراكها وحفظها .

واذا كتبنا هذه الكتب بالعربية فلانها لغتنا الوطنية وهى احدى مقومات امتنا العربية فلا يتحقق عندنا اى ابداع ولا اختراع الا بها ولا تقدم ولا انطلاق الا بها ولا انتاج ولا انتاجية الا بها ولا تحرر ولا مناعة الا بها ...

واللغة العربية اداة اتصال بين الاجيال فنقرا كتب حسن بن الهيثم مثلا والخوارزمى والبيرونى وجابر بن حيان وغيرهم كانهم يعيشون معنا اليوم ولم يقع ذلك الا بفضل ثبات لغتنا فكتبنا هذه ستقرا بعد اجيال متتالية وهذا الاتصال العظيم بين الاجيال الذى تختص بربطه اللغة العربية يجعلها اللغه الحية بالمعنى الصحيح لمفهوم حياة لغة وحيويتها .

والفنا هذه الكتب بالعربية لغة وروحا اذ اخترنا الرموز الموافقة والاكثر تعبيرا والاكثر سهولة والاكثر استعملا فى المعاجم العربية العلمية وخاصة فى كتب المنظمات التابعة للجامعة العربية . وكلما وجدنا ان ترجمة الرموز من الاجنبية لا تتلائم مع الروح العربية الا وغيرناها فمثال ذلك رمز *(Log) logarithme* تركنا كلمة « لوغارتم » واتخذنا « خوارزمى » (خو) تمجيدا لعالمنا العربى الخوارزمى مثل ما يكتب الرمز لابلاسيان *laplacien* (Δ) او دالمبارسيان *D'Alembertien* ($\square$) تمجيدا للعالمين لابلاص ودالمبار وكل تبديل وقع للرموز العادية مرتكز على قواعد منطقيه يطول تفسيرها هنا .

وهذه الكتب تعتمد البرهان المنطقى لتشييد هذا العلم المعاصر كما ان تاليف هذه الكتب نفسها يمثل هو ايضا برهانا على ان العربية لغة علم . فلذلك اطلقنا عليها اسم « البرهان فى الرياضيات والفيزياء والكيمياء » . وستصدر الاجزاء الاخرى متتالية حسب الامكان اذ اننا اعددنا جلها ولم يبق سوى طباعتها والله ولى التوفيق

الفصـــل الأول

موجز في الجبر وحساب المثلثات والحساب الشعاعي

١ . الجبر

تستعمل فى هذا الجزء الاعداد الموجبة والسالبة والصفرية التى تكون مجموعة الاعداد النسبية والجبرية. وستوضع مجموعة من المعادلات والمتطابقات بدون برهـان .

$$\text{أ} - (\text{ب} - \text{ج}) = \text{أ} - \text{ب} + \text{ج} \qquad \frac{\text{س}}{\text{أ}} = \text{ب} \Longrightarrow \text{س} = \text{أ}.\text{ب}$$

$$\text{أ}.\text{س} = \text{ب} \Longrightarrow \text{س} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}} \qquad \text{أ} \neq 0$$

$$\text{أ}\,\text{س} + \text{ب} = 0 \Longrightarrow \text{س} = -\frac{\text{ب}}{\text{أ}} \qquad \text{أ} \neq 0$$

$$\text{س}^2 = \text{أ} \Longrightarrow \text{س} = \pm\sqrt{\text{أ}} \qquad \text{أ} > 0$$

$$\text{أ}\,\text{س}^2 = \text{ب} \Longrightarrow \text{س} = \pm\sqrt{\frac{\text{ب}}{\text{أ}}} \qquad \frac{\text{ب}}{\text{أ}} > 0$$

$$\frac{1}{\text{أ}} + \frac{1}{\text{ب}} = \frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{أ}\,\text{ب}}$$

(أ + ب) (ج + د) = أ ج + أ د + ب ج + ب د

(أ + ب) (أ - ب) = أ^{2} - ب^{2}

(أ + ب)^{2} = أ^{2} + 2 أ ب + ب^{2}

(أ - ب)^{2} = أ - 2 أ ب + ب^{2}

(أ^{3} - ب^{3}) = (أ - ب) (أ^{2} + أ ب + ب^{2})

(أ - ب)^{3} = (أ + ب) (أ + ب)^{2} = (أ + ب) (أ^{2} + 2 أ ب + ب^{2})

= أ^{3} + 3 أ^{2} ب + 3 أ ب^{2} + ب^{3}

(أ - ب)^{3} = أ^{3} - 3 أ^{2} ب + 3 أ ب^{2} - ب^{3}

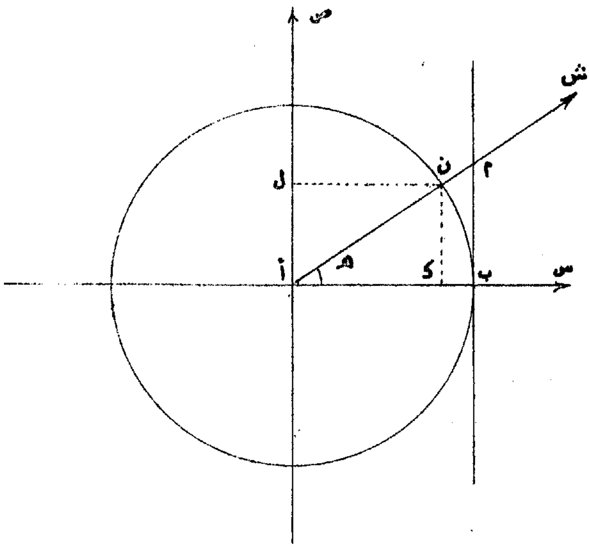
2) حساب المثلثات

1) تعريف الدوال المثلثية

المحور هو مستقيم موجه يحوى أصلا وبالتالى كل نقطة منه تضبط ببعدها عن الاصل المذكور ويكون موجبا او سالبا وهكذا تضبط كل نقطة على المحور بعدد جبرى . (1.1)

1.1

يعين الطول بـ أ ن او |أ ن| والقيمة الجبرية $\overline{\text{أ ن}}$. ولتعيين الدوال المثلثاتية نرسم دائرة شعاعها واحدة الطول ومركزها أ نقطة تقاطع المحورين المتعامدين أ س ، أ ص . ونعين اتجاها على الدائرة وهو الاتجاه المعاكس لعقارب الساعة ويطلق عليه الاتجاه المثلثاتي . وتقاس الزاوية هـ التي يكونها المستقيم أ ش مع المحور أ س بطول القوس ب ن مقدرا جبريا . وان وحدة قياس الزوايا تسمى بالشعية (ش) . وان دورة كاملة اي : 360° او 400 غراد تساوي 2π شعية .



2.1

وتعرف الجيوب والجيوب التمام بـ : جا هـ = $\overline{\text{أ ك}}$ و جتا هـ = $\overline{\text{أ ل}}$

وهما مقدران جبريا على المحورين أ س ، أ ص.

ويعرف الظل بـ

$$\text{ظا هـ} = \frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = \overline{\text{ب م}}$$

معادلات مهمة

$$\text{جتا}\,0 = \text{جا}\,\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \text{جتا}\,\frac{\pi}{2} = \text{جا}\,0 = 0$$

$$\text{جا}\,\frac{\pi}{6} = \text{جتا}\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \text{جتا}\,\frac{\pi}{6} = \text{جا}\,\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{جتا}\,\frac{\pi}{4} = \text{جا}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{ظا}\,0 = 0 \qquad \text{ظا}\,\frac{\pi}{4} = 1 \qquad \text{ظا}\,\frac{\pi}{2} \longrightarrow \infty$$

(2) خاصيات الدالات المثلثاتية

$$\text{جا}\,(\text{هـ} + 2\pi) = \text{جا}\,\text{هـ}$$

$$\text{جتا}\,(\text{هـ} + 2\pi) = \text{جتا}\,\text{هـ}$$

$$\text{جتا}\,\text{هـ} = \text{جتا}\,(-\text{هـ}) \text{ ، } \text{جا}\,\text{هـ} = -\,\text{جا}\,(-\text{هـ})$$

$$\text{جتا}\,(\frac{\pi}{2} - \text{هـ}) = \text{جا}\,\text{هـ} \text{ ، } \text{جا}\,(\frac{\pi}{2} - \text{هـ}) = \text{جتا}\,\text{هـ}$$

$$\text{جتا}\,(\text{هـ} + \frac{\pi}{2}) = -\,\text{جا}\,\text{هـ} \text{ ، } \text{جا}\,(\text{هـ} + \frac{\pi}{2}) = \text{جتا}\,\text{هـ}$$

$$\text{جا}\,(\pi - \text{هـ}) = \text{جا}\,\text{هـ} \text{ ، } \text{جا}\,(\text{هـ} + \pi) = -\,\text{جا}\,\text{هـ} \text{ ، } \text{جتا}\,(\text{هـ} + \pi) = -\,\text{جتا}\,\text{هـ}$$

$$\text{ظا}\,(\text{هـ} + \pi) = \text{ظا}\,\text{هـ} \text{ ، } \text{ظا}\,(\frac{\pi}{2} - \text{هـ}) = \frac{1}{\text{ظا}\,\text{هـ}} = \text{ظتا}\,\text{هـ}$$

وتبين هاته المعادلات ان قيمة الدالات المثلثاتية تبـــقى هي نفسها لما تزداد الزاوية بقيمة 2π وتسمى هذه الدالات دورية وسعة دورتها 2π ولكن دورة ظا هـ تقدر بـ π فقط .

(3) علاقات مهمة

ويستنتج من نظرية بيتاغوراس أن : $\text{جا}^2\,\text{هـ} + \text{جتا}^2\,\text{هـ} = 1$

بعد قسمة هذه العلاقة على $\text{جتا}^2\,\text{هـ}$ و $\text{جا}^2\,\text{هـ}$ يكون :

$$1+\text{ظا}^2\text{هـ}=\frac{1}{\text{جتا}^2\text{هـ}} \quad \text{و} \quad 1+\frac{1}{\text{ظا}^2\text{هـ}}=\frac{1}{\text{جا}^2\text{هـ}}$$

ان صيغ جمع الدالات المثلثاتية هى :

$$\text{جتا}(\text{و}+\text{ي})=\text{جتا و جتا ي}-\text{جا و جا ي}$$
$$\text{جا}(\text{و}+\text{ي})=\text{جا و جتا ي}+\text{جتا و جا ي}$$
$$\text{جتا 2 و}=\text{جتا}^2\text{و}-\text{جا}^2\text{و}=1-2\text{جا}^2\text{و}=2\text{جتا}^2\text{و}-1$$
$$\text{جا 2 و}=\text{جا و جتا و}$$

وكذلك الصيغ التالية :

$$\text{جا}^2\text{و}=\frac{1-\text{جتا 2 و}}{2}$$
$$\text{جتا}^2\text{و}=\frac{1+\text{جتا 2 و}}{2}$$

والصيغ التى تحول جمع الدالات المثلثاتية الى ضرب هى :

$$\text{جتا}(\text{و}+\text{ي})+\text{جتا}(\text{و}-\text{ي})=2\,\text{جتا و جتا ي}$$
$$\text{جتا}(\text{و}-\text{ي})-\text{جتا}(\text{و}+\text{ي})=2\,\text{جا و جا ي}$$
$$\text{جا}(\text{و}+\text{ي})+\text{جا}(\text{و}-\text{ي})=2\,\text{جا و جتا ي}$$
$$\text{جا}(\text{و}+\text{ي})-\text{جا}(\text{و}-\text{ي})=2\,\text{جتا و جا ي}$$

وتصبح بوضع $(\text{و}+\text{ي})=\text{ك}$ $(\text{و}-\text{ي})=\text{ل}$

$$\text{جتا ك}+\text{جتا ل}=2\,\text{جتا}\frac{\text{ك}}{2}\,\text{جتا}\frac{\text{ل}}{2}$$
$$\text{جتا ك}-\text{جتا ل}=-2\,\text{جا}\frac{\text{ك}}{2}\,\text{جا}\frac{\text{ل}}{2}$$
$$\text{جا ك}+\text{جا ل}=2\,\text{جا}\frac{\text{ك}}{2}\,\text{جتا}\frac{\text{ل}}{2}$$
$$\text{جا ك}-\text{جا ل}=2\,\text{جتا ك}\,\text{جا ل}$$

وصيغ الظل هى :

$$\text{ظا}(\text{و}+\text{ي})=\frac{\text{ظا و}+\text{ظا ي}}{1-\text{ظا و ظا ي}}$$

$$\text{ظا}(\text{و}-\text{ي}) = \frac{\text{ظا و} - \text{ظا ي}}{1 + \text{ظا و ظا ي}}$$

$$\text{ظا } 2 \text{ و} = \frac{2 \text{ ظا و}}{1 - \text{ظا}^2 \text{ و}}$$

$$\text{جتا } 2 \text{ و} = \frac{1 - \text{ظا}^2 \text{ و}}{1 + \text{ظا}^2 \text{ و}}$$

$$\text{جا } 2 \text{ و} = \frac{2 \text{ ظا و}}{1 + \text{ظا}^2 \text{ و}}$$

5) الحساب الشعاعي

1) تعريف

ان الاعداد لا تكفى احيانا لتعريف بعض المقادير الفيزيائية التي تتطلب ضبط الاتجاه والاتجاه المعين وبهما تعرف المقادير الشعاعية .

يتميز الشعاع بـ :

- قيمته وهي طول الشعاع وتسمى المقياس
- اتجاهه وهو المستقيم الذي يحمله
- اتجاهه المعين على المستقيم الذي يحمله .

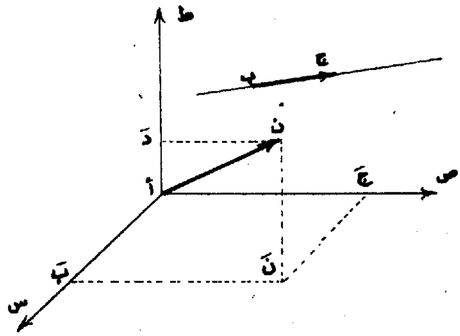
يرمز الشعاع بحرف فوقه سهم فيكتب : $\overleftarrow{\text{بج}} = \overleftarrow{\text{ش}}$

وطوله: $|\overleftarrow{\text{ش}}|$ أو ش

يسمى ب أصل الشعاع و ج آخره .

لنعتبر الشعاع $\overleftarrow{\text{أن}}$ ونسقط ن على المحاور الثلاثة المتعامدة : أس ، أص و أط في النقط التالية بَ وجَ و دَ . ونسمي أبَ و أجَ و أدَ باحداثيات الشعاع $\overleftarrow{\text{أن}}$ وهي على التوالي الفصل والترتيب والارتفاع .

ويكون الشعاع مربوطا اومنزلقا او طليقا وذلك وفق ما يشترط على اصله .



3.1

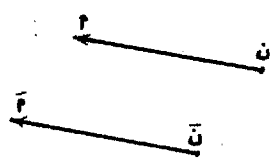
أ) **الشعاع المربوط** : يتميز بان اصله مفروض .

ب) **الشعاع المنزلق** : يتميز بأن أصله نقطة ما من المستقيم الحامل .

4.1

$$\overleftarrow{\text{بج}} = \overleftarrow{\text{بَ جَ}}$$

ج) **الشعاع الطليق** : يتميز بأن أصله نقطة ما من الفضاء .



$$\overleftarrow{\text{نم}} = \overleftarrow{\text{نَ مَ}}$$

5.1

٢) عمليات على الاشعة

أ) ضرب شعاع بعدد : اذا ضربنا شعاعا $\overleftarrow{\text{ب ج}}$ بعدد ع فان حامل الشعاع لا يتغير وتضرب قيمة الشعاع الجبرية بالعدد ع .

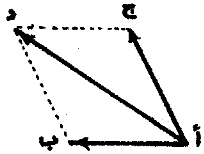
اذا كان العدد ع اكبر من الصفر فان الاتجاه المعين للشعاع لا يتغير .

او كان العدد ع اصغر من الصفر فان الاتجاه المعين يتغير .

ب) جمع شعاعين ان عملية جمع شعاعين $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ و $\overleftarrow{\text{أ ج}}$ لهما نفس الاصل تقتضي تكوين متوازى الاضلاع أ ج د ب ومنه نكتب :

$$\overleftarrow{\text{أ د}} = \overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{أ ج}}$$

تعرف $\overleftarrow{\text{أ د}}$ بالحاصلة الهندسية للشعاعين . (6.1)

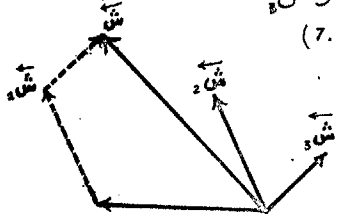


6.1

ينشأ متوازى الاضلاع بعدة طرق منها :

- من تقاطع المستقيم الموازى لـ أ ج والمار من ب والمستقيم الموازى لـ أ ب والمار من ج
- وبرسم الشعاع بـ د المتكافى لـ أ ج .

تعمم هذه الطريقة فى حالة جمع اشعة متعددة وذلك لتبسيط الحاصلة . تجمع الاشعة $\overleftarrow{\text{ش}}_1$ و $\overleftarrow{\text{ش}}_2$ و $\overleftarrow{\text{ش}}_3$ وذلك بان نرسم من آخر الحاصلة الهندسيه للشعاعين $\overleftarrow{\text{ش}}_1$ و $\overleftarrow{\text{ش}}_2$ المتكافىء لـ ش_3 . (7.1)



7.1

يكون جمع الاشعة ترتيبيا وتبادليا اى :

$$\left(\overleftarrow{\text{ش}}_1 + \overleftarrow{\text{ش}}_2\right) + \overleftarrow{\text{ش}}_3 = \overleftarrow{\text{ش}}_1 + \left(\overleftarrow{\text{ش}}_2 + \overleftarrow{\text{ش}}_3\right) ، \overleftarrow{\text{ش}}_1 + \overleftarrow{\text{ش}}_2 = \overleftarrow{\text{ش}}_2 + \overleftarrow{\text{ش}}_1$$

تخضع الاشعة الطليقة للترتيب والتبادل شريطة ارجاعهما لنفس الاصل ولكن الاشعة المنزلقة لا يمكن ارجاعها لنفس الاصل الا اذا تقاطعت حواملها واما الاشعة المربوطة فيجب ان يكون لها نفس الاصل .

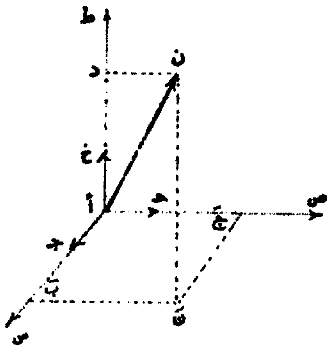
٣) احداثيات شعاع :

ويمكن ان نكتب استنادا الى التعريف بعملية جمع الاشعة الشعاع $\overleftarrow{\text{أن}}$ يساوي : (انظر شكل 8.1)

$$\overleftarrow{\text{أن}} = \overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{أج}} + \overleftarrow{\text{أد}}$$

يستنتج ان شعاعا ما يعتبر الحاصلة الهندسية لمساقطه على المحاور الثلاثة المتعامدة .

لنفرض ان $\overleftarrow{\text{جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{خـ}}$ هي اشعة وحدات المحاور الثلاثة المتعامدة أس، أص، أط، ونضع ان : $\overleftarrow{\text{أب}} = \text{س}\,\overleftarrow{\text{جـ}}$ $\overleftarrow{\text{أج}} = \text{ص}\,\overleftarrow{\text{حـ}}$ $\overleftarrow{\text{أد}} = \text{ط}\,\overleftarrow{\text{خـ}}$



8.1

فنجد ان س، ص، ط هي احداثيات النقطة ن
وبذلك تكتب العلاقة المهمة : (8.1)

$$\overleftarrow{\text{أن}} = \text{س}\,\overleftarrow{\text{جـ}} + \text{ص}\,\overleftarrow{\text{حـ}} + \text{ط}\,\overleftarrow{\text{خـ}}$$

٤) جمع الاشعة المعينة باحداثياتها :

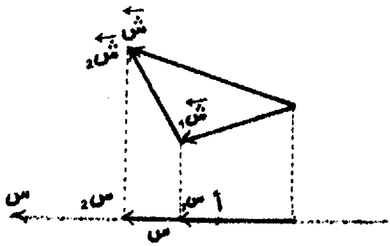
ليكن لدينا الشعاعان : $\overleftarrow{\text{أن}_1}$ و $\overleftarrow{\text{أن}_2}$

$$\begin{cases} \overleftarrow{\text{أن}_1} = \text{س}_1\,\overleftarrow{\text{جـ}} + \text{ص}_1\,\overleftarrow{\text{حـ}} + \text{ط}_1\,\overleftarrow{\text{خـ}} \\ \overleftarrow{\text{أن}_2} = \text{س}_2\,\overleftarrow{\text{جـ}} + \text{ص}_2\,\overleftarrow{\text{حـ}} + \text{ط}_2\,\overleftarrow{\text{خـ}} \end{cases}$$

ونكتب استنادا الى الخاصية الترتيبية لجمع الاشعة ان :

$$\overleftarrow{\text{أن}_1} + \overleftarrow{\text{أن}_2} = (\text{س}_1 + \text{س}_2)\,\overleftarrow{\text{ج}} + (\text{ص}_1 + \text{ص}_2)\,\overleftarrow{\text{ح}} + (\text{ط}_1 + \text{ط}_2)\,\overleftarrow{\text{خ}}$$

وبالتالي يستنتج ان احداثيات الحاصلة الهندسية لعدة اشعة هي جمع احداثيات كل شعاع .



9.1

ويمكن ان نقول بطريقة اخرى انه اذا اعتبرنا احدى الاحداثيات اي الاسقاط على محور واحد فمسقط الحاصلة الهندسية للشعاعين يساوي جمع مسقطي الشعاعين . (9.1)

فمثلا اذا كانت $\overleftarrow{\text{ش}}$ الحاصلة الهندسية لـ $\overleftarrow{\text{ش}_1}$ و$\overleftarrow{\text{ش}_2}$ فمسقط الشكل الذي به يحصل $\overleftarrow{\text{ش}}$ يبين ان : $\text{س} = \text{س}_1 + \text{س}_2$

وكذلك للمحور أص : $\text{ص} = \text{ص}_1 + \text{ص}_2$

وكذلك للمحور أط : $\text{ط} = \text{ط}_1 + \text{ط}_2$

وهكذا :

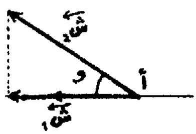
$$\left.\begin{array}{l} \text{س} = \text{س}_1 + \text{س}_2 \\ \text{ص} = \text{ص}_1 + \text{ص}_2 \\ \text{ط} = \text{ط}_1 + \text{ط}_2 \end{array}\right\}$$

هـ) الضرب المقدارى

ا) عبارة الضرب المقدارى

فلنعتبر شعاعين $\overleftarrow{\text{ش}}_1$ و $\overleftarrow{\text{ش}}_2$ يعرف الضرب المقدارى للشعاعين بـ : (10.1)

$$\overleftarrow{\text{ش}}_1 \cdot \overleftarrow{\text{ش}}_2 = \text{ش}_1 \cdot \text{ش}_2 \ \text{جتا و}$$



10.1

ش$_1$ و ش$_2$ هما قياسا (طول) الشعاعين و و الزاوية التى يكونها الشعاعان . وينشأ من هذه العملية عدد يتعلق بالشعاعين .

حالتان خاصتان

اولهما : الشعاعان متعامدان اى ان $\text{و} = \frac{\pi}{2}$ وَجتا و $= 0$ فينتج من ذلك ان الضرب المقدارى يساوى صفرا .

ثانيهما : الشعاعان متوازيان اى ان و $= 0$ و جتا و $= 1$ ويكون الضرب المقدارى يساوى ضرب طول الشعاعين . واذا اعتبرنا شعاعا واحدا فيكون مربعًا طوله : $\overleftarrow{\text{ش}}_1 \cdot \overleftarrow{\text{ش}}_1 = |\overleftarrow{\text{ش}}_1|^2$

ونلاحظ ان الضرب المقدارى للشعاعين $\overleftarrow{\text{ش}}_1$ و $\overleftarrow{\text{ش}}_2$ يتلخص فى ضرب الشعاع $\overleftarrow{\text{ش}}_1$ بمسقط الشعاع $\overleftarrow{\text{ش}}_2$ على المحور الحامل لـ $\overleftarrow{\text{ش}}_1$

$$\overleftarrow{\text{ش}}_1 \cdot \overleftarrow{\text{ش}}_2 = |\overleftarrow{\text{ش}}_1| \cdot (|\overleftarrow{\text{ش}}_2| \ \text{جتا و})$$

ان الضرب المقدارى توزيعى اى : $\overleftarrow{\text{ش}}_1 \cdot \overleftarrow{\text{ش}}_2 = \overleftarrow{\text{ش}}_2 \cdot \overleftarrow{\text{ش}}_1$ وذلك حسب معادلة تعريف الضرب .

ان الضرب المقدارى توزيعى اى $\overleftarrow{\text{ش}}_1 \cdot (\overleftarrow{\text{ش}}_2 + \overleftarrow{\text{ش}}_3) = \overleftarrow{\text{ش}}_1 \cdot \overleftarrow{\text{ش}}_2 + \overleftarrow{\text{ش}}_1 \cdot \overleftarrow{\text{ش}}_3$
وتظهر هذه خاصية بديهيا اذا اسقطت الاشعة على محور واحد .

ب) عبارة الضرب المقدارى بواسطة الاحداثيات

فلنعتبر الشعاعين : $\overleftarrow{\text{ش}}_1$ و $\overleftarrow{\text{ش}}_2$ واحداثياتهما : س$_1$، ص$_1$، ط$_1$ و س$_2$، ص$_2$، ط$_2$ فى مجموعة ثلاثة محاور متعامدة واشعة وحداتها $\overleftarrow{\text{جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{خـ}}$:

$$\begin{cases} \overleftarrow{\text{ش}}_1 = \text{س}_1 \overleftarrow{\text{جـ}} + \text{ص}_1 \overleftarrow{\text{حـ}} + \text{ط}_1 \overleftarrow{\text{خـ}} \\ \overleftarrow{\text{ش}}_2 = \text{س}_2 \overleftarrow{\text{جـ}} + \text{ص}_2 \overleftarrow{\text{حـ}} + \text{ط}_2 \overleftarrow{\text{خـ}} \end{cases}$$

فيكون : ش١ . ش٢ = (س١ س٢ + ص١ ص٢ + ط١ ط٢)

اذ ان : جـ . جـ = حـ . حـ = خـ . خـ = ١ وكل ضرب ك : جـ . حـ = ٠

ويستنتج ان : ش . ش = س² + ص² + ط²

ج) تطبيقات

يستعمل الضرب المقدارى لحساب : جتا (و - ي) . ولنعتبر شعاعين أب ، أج طولهما واحدة الطول ويكونان مع المحور أ س الزاويتين : و ، ي فنكتب استنادا الى تعريف الضرب المقدارى ان :

أب . أج = جتا (و - ي)

وبما ان :

أب = حـ جتا و + جـ جا و

أج = حـ جتا ي + جـ جا ي

وطبقا للخاصية التوزيعية بالنسبة للجمع يحصل :

أب . أج = جتا و . جتا ي + جا و . جا ي

اى : جتا (و - ي) = جتا و . جتا ي + جا و . جا ي

٦) الضرب الشعاعي :

ا) تعريف :

يعرف الضرب الشعاعي للشعاعين ش١ و ش٢ بالعلاقة :

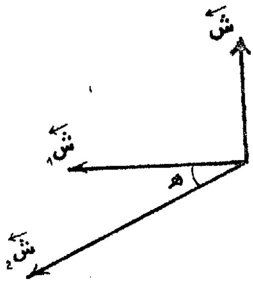
ش = |ش١| . |ش٢| . جا هـ

ش هو شعاع محمول على محور عمودى على المستوى المتكون من ش١ و ش٢ ويكون ثلاثي السطوح (ش ، ش١ ، ش٢) موجبا اى ان ش٢ توجد ، بالنسبة لـ ش١ ، على شمال مراقب لما يقف على طول ش .

ويكون $\overleftarrow{\text{ش}}_1$ و $\overleftarrow{\text{ش}}_2$ الزاوية هـ .

ويكتب الضرب الشعاعى للشعاعين $\overleftarrow{\text{ش}}_1$ و $\overleftarrow{\text{ش}}_2$: (11.1)

$$\overleftarrow{\text{ش}} = \left[\overleftarrow{\text{ش}}_1 \times \overleftarrow{\text{ش}}_2\right]$$



11.1

ويساوى: $\text{ش}_1 \cdot \text{ش}_2 \cdot$ جا هـ مساحة متوازى الاضلاع المتكون من $\overleftarrow{\text{ش}}_1$ و $\overleftarrow{\text{ش}}_2$. وهكذا فان الضرب الشعاعى لشعاعين متوازيين يساوى صفرا .

ملاحظة : تعتبر العلاقة السابقة غير متبادلة

$$\left[\overleftarrow{\text{ش}}_1 \times \overleftarrow{\text{ش}}_2\right] = -\left[\overleftarrow{\text{ش}}_2 \times \overleftarrow{\text{ش}}_1\right]$$

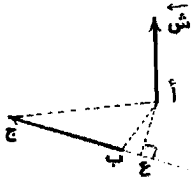
ويكون الضرب الشعاعى توزيعيا اذ ان :

$$\left[\overleftarrow{\text{ش}} \times \left(\overleftarrow{\text{ش}}_1 + \overleftarrow{\text{ش}}_2\right)\right] = \left[\overleftarrow{\text{ش}} \times \overleftarrow{\text{ش}}_1\right] + \left[\overleftarrow{\text{ش}} \times \overleftarrow{\text{ش}}_2\right]$$

ب) عزم شعاع بالنسبة لنقطة :

ان عزم الشعاع $\overleftarrow{\text{ب ج}}$ بالنسبة للنقط أ هو شعاع $\overleftarrow{\text{ش}}$ معرف بـ :

$$\overleftarrow{\text{ش}} = \left[\overleftarrow{\text{أ ب}} \times \overleftarrow{\text{ب ج}}\right]$$



12.1

ان طول الشعاع $\overleftarrow{\text{ش}}$ يساوى ضعف مساحة المثلث أ ب ج اى : (12.1)

$$\left|\overleftarrow{\text{ش}}\right| = \text{أ ع} \cdot \text{ب ج}$$

ان عزم شعاع بالنسبة لنقطة ما يساوى نتيجة ضرب طول الشعاع ببعد النقطة عن المحور حامل الشعاع . ويعرف دائما العزم، اذا كان الشعاع $\overleftarrow{\text{ب ج}}$ طليقا على حامله، بنفس القيمة .

اذا كانت النقطة على الحامل فان العزم يساوى صفرا .

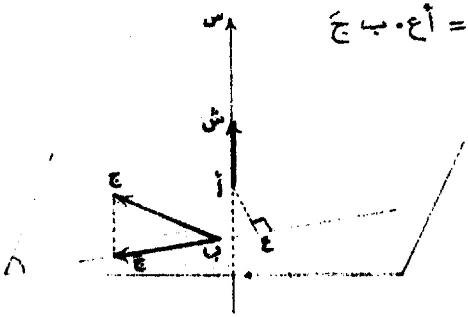
ج) عزم شعاع بالنسبة لمحور

ان عزم شعاع بالنسبة لمحور يساوى مسقط عزم الشعاع عليه بالنسبة لنقطة ما من المحور .

فلنعتبر الشعاع ب جَ والمحور أ س وننشأ المستوى العمودى على المحور أ س والمار من ب ولنسقط ب جَ على المستوى فيحصل ب جَ . ان عزم الشعاع ب ج بالنسبة للمحور أ س يساوى عزم ب جَ بالنسبة للنقطة أ المشتركة بين المحور والمستوى اى :

$$|\overleftarrow{\text{اش}}| = \text{أع} \cdot \text{ب جَ} \qquad (13.1)$$

(أع بعد أ عن المحور ب جَ).



13.1

ان عزم شعاع ب جَ بالنسبة لمحور أ س يساوى قيمة ضرب البعد أع الكائن بين المحور والشعاع أ س بمسقط الشعاع ب ج على مستوى عمودى على المحور أ س .

تمارين

1 ـ احسب $\frac{\text{ب}^4 - \text{ت}^4}{\text{ب} - \text{ت}}$ اذا كانت $\text{ب} \neq \text{ت}$.

2 ـ ما هي عبارة $(\text{ب} + \text{ت})^4$ واستخلص منها عبارة $(\text{ب} - \text{ت}^4)$.

3 ـ لاية قيمة "س" تعرف الدالة $\text{ص} = \sqrt{\text{س}^2 - 1}$ ، وكذلك لـ $\text{ص} = \frac{\text{س} + 2}{\sqrt{\text{س}} - 1}$ ،
وكذلك $\text{ص} = \frac{\text{س} - 1}{\text{س}^3 + 2\text{س} - 4}$.

4 ـ استخرج "ص" من العبارة $\text{س}^2 - \text{س}\,\text{ص} - 2 = 0$.

5 ـ ما هي دورة . $\text{جا}\,3\text{هـ}$ و $(\text{ظا}\,\text{هـ} - \text{ظتا}\,\text{هـ})$.

6 ـ احسب $\text{جا}\,3\text{هـ}$ وكذلك $(\text{جتا}\,\text{هـ} + \text{جا}\,\text{هـ})$.

7 ـ ماهو حل المعادلة : $\text{جا}\,\text{س}^2 = 0$.

8 ـ ما هو حل المعادلة : $-\text{جا}^2\text{س} - \underline{1 + \sqrt{2}}\ \text{جتا}\,\text{س} + \frac{\sqrt{2}}{4} + 1 = 0$.

9 ـ ما هو حل المعادلة : $\text{ظا}^2\text{س} = \sqrt{3} \cdot \text{ظا}\,\text{س}$.

10 ـ اوجد حل :
$$\begin{cases} \text{ص} - \text{س} = \frac{\pi}{2} \\ \text{جا}\,\text{س} = \text{جتا}\,\text{ص} \end{cases}$$
.

11 ـ لنفرض ثلاثة اشعة متساوية الطول . كيف يجب ان توضع حتى يكون جمعها صفرا ؟

12 ـ لنعتبر شعاعين متساويى الطول $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أت}}$. كيف يكون شعاع الجمع وشعاع الطرح بالنسبة لهما ؟

13 ـ لنعتبر النقط : $\text{ب}\left|\begin{matrix}1\\1\\0\end{matrix}\right.$ و $\text{ت}\left|\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}\right.$ و $\text{ث}\left|\begin{matrix}0\\1\\1\end{matrix}\right.$ ، فاذا كان أ الاصل .

ابحث عن قيمة . ح = [أب x أت] . أث .

14 ـ فلنعتبر الاصل أ ونقطة ب ثابتة في مستوى افقي يمر من أ
اين توجد النقطة ت ليكون عزم الشعاع ب ت بالنسبة لـ أ عموديا ؟

15 ـ فلنفترض محورا م ونقطة ب وشعاعا ب ت طوله معين .
اين تكون النقطة ت ليبلغ طول عزم الشعاع ب ت بالنسبة للمحور م حده الاقصى ؟

الفصل الثاني

مبادئ عامة في الدالات

1 - احداثيات نقطة

أ) الاحداثيات العمودية

تعتبر الدالة مفهوما رياضيا معرفا بثلاث معطيات :

فالاولى : هى مجموعة عناصر س تسمى ميدان تعريف الد ،
والثانية : هى مجموعة عناصر ص تسمى قيمة الدالة
والثالثة : قانون موافقة المجموعتين . اى ان الالة تمكن من ربط عنصر من المجموعة الاولى بعنصر من المجموعة الثانية . فنكتب ص = د(س) مثلا :

$\text{ص} = 3\,\text{س} + 5$ (ان الدالة معرفة لكل عدد طبيعى س)

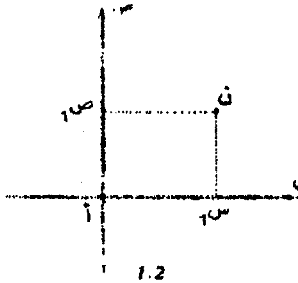
$\text{ص} = \dfrac{2\,\text{س} + 3}{\text{س} - 1}$ (ان الدالة معرفة لكل عدد سوى س = 1)

$\text{ص} = \sqrt{\text{س} - 1}$ " " " " " " $\text{س} > 1$

ويمكن ان ترتبط الدالة بمتحولات عديدة س_1، س_2، س_3

مثلا : ص = د (س$_1$، س$_2$، س$_3$).

ولكن تابع رسم بيانى . فللتابع ص = د (س) رسم بيانى فى المستوى المعرف بالمحورين المتعامدين أس، أص. وتوافق كل قيمة س$_1$ لمجموعة س نقطة على المحور أس تمثل بـ أس$_1$ الذى يسمى الفصل وتوافق هاته القيمة أص$_1$ حسب الدالة ص = د (س) وتسمى الترتيب . (1.2)



1.2

واذا رسم العمودان أحدهما على أس والمار من س$_1$ والاخر على أص والمار من ص$_1$ التقيافى نقطه ن تسمى النقطة البيانية لـ(س$_1$، ص$_1$).

ويشكل تغير النقطة ن فى المستوى (أس، أص) خطا يسمى الرسم البيانى للدالة ص = د (س)

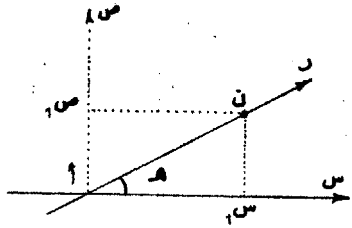
ويقال ان الخط البيانى قد رسم فى الاحداثيات المحورية

واذا كانت للنقطة ثلاثة احداثيات هى س$_1$، س$_2$، س$_3$ اى ان ص = د (س$_1$، س$_2$، س$_3$) فان الخط البيانى يصبح مساحة بيانية فى ثلاثة ابعاد وتنطبق الحالة على اربعة أبعاد او اكثر .

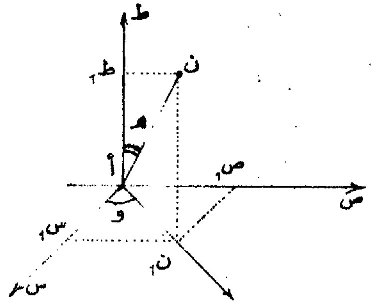
ويمكن ان نكتب : $\overleftarrow{أن}$ = س$_1$ $\overleftarrow{ح}$ + س$_2$ $\overleftarrow{ج}$ + س$_3$ $\overleftarrow{خ}$

الاحداثيات القطبية

يمكن ان نضبط النقطة ن بوسيلة ثانية وهي : من النقطة أ أصل المحور "اس" يرسم المحور أر المار من ن فتتكون الزاوية أس، أر. فان الاحداثيتين (هـ ، أن) تضبط النقطة البيانية ن، وتسمى هاتان الاحداثيتان بالاحداثيتين القطبيتين . وهكذا يرسم الخط البياني للدالة ر= د (هـ) وتوافق لكل قيمة للزاوية هـ قيمة جبرية أر ومنه تضبط هاتان الاحداثيتان النقطة ن في المستوى (أس، أر) ، واما اذا كان التابع في ثلاثة أبعاد فان الاحداثيات المحورية تعرف بـ (هـ ، و ، أن). (2.2 و 3.2)



2.2



3.2

واذا كانت الابعاد اكثر من ثلاثة فيعمم الاسلوب البياني .

العلاقة بين الاحداثيات المحورية والقطبية

اذا رسمنا المحور أ ص في الشكل (2 ـ 2) واسقطنا ن على أس، أص في (س$_1$ ، ص$_1$) يظهران :

$$\left\{ \begin{array}{l} س_1 = أن \cdot جتا\ هـ \\ ص_1 = أن \cdot جا\ هـ \end{array} \right.$$

تلك هي العلاقة بين الاحداثيتين المحوريتين (س$_1$، ص$_1$) والاحداثيتين القطبيتين (هـ ، أن) .

واذا اعتبرنا الشكل 3.2 للرسم البياني في ثلاثة أبعاد وأسقطنا النقطة ن في (سن، صن، طن) يكون لدينا :

$$\begin{cases} \text{س}_{\text{ن}} = \text{أن . جاه . جتاو} \\ \text{ص}_{\text{ن}} = \text{أن . جاه . جاو} \\ \text{ط}_{\text{ن}} = \text{أن . جتاه} \end{cases}$$

مـلاحظـــة

ان الربط بين س و ص كما عرف سابقا هو ربط تابعي ولكنه توجد انواع أخرى من الروابط منها الربط الاحصائي الذي يختص بقيم عديدة لـ س الموافقة لقيمة ص او العكس فيقال ان المتحول احتمالي والدالة احتمالية

الرسم البياني لخط

بالدالات المفصلة والدالات المضمرة

يرتبط الخط البياني في ثلاثة ابعاد بمتحول ض اي ان معرفة التوابع الثلاثة :

$$1 \quad \begin{cases} \text{س} = \text{د}_1(\text{ض}) \\ \text{ص} = \text{د}_2(\text{ض}) \\ \text{ط} = \text{د}_3(\text{ض}) \end{cases}$$

تضبط نقطة ن في الفضاء ذي الابعاد الثلاثة ولما يتغير المتحول ض فان النقطة ن تنتقل على الخط البياني . ويمكن حذف المتحول ض والحصول على دالتين :

$$2 \quad \begin{cases} \text{د}_1(\text{س، ص، ط}) = 0 \\ \text{د}_2(\text{س، ص، ط}) = 0 \end{cases}$$

ويمثل كل منهما في الفضاء ذي الابعاد الثلاثة مساحة وتكون نقطة تقاطع المساحتين نفس الخط الممثل بالدالات 1 . وتسمى هذه بالدالات المفصلة وتلك بالدالات المضمرة . وتعاد

العملية ذاتها فى الفضاء ذى البعدين .

$$\left.\begin{array}{l} \text{س} = \text{د}_1\,(\text{ض}) \\ \text{ص} = \text{د}_2\,(\text{ض}) \end{array}\right\} \quad 3 \qquad \text{الدالات المنفصلة}$$

واذا حذفنا المتحول ض تحصل المعادلة :

$$\text{د}_1\,(\text{س}،\text{ص}) = 0 \qquad 4$$

وهى تمثل مستقيما فى المستوى أ س، أ ص.

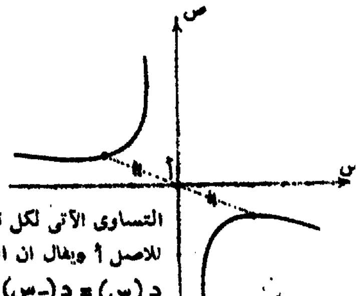
٢) تحولات الاحداثيات

ترتبط الدالة وخطها البيانى بمجموعة الاحداثيات التى تعتبر مرجعا لها وقد توجد مراجع اخرى صالحة لتبسيط العمليات الحسابية ومثل ذلك : $\text{ص} = (\text{س} - 1)^2$ فاذا وقع الانتقال الى المرجع ($\text{أ}_1\ \text{س}_1$، $\text{أ}_1\text{ص}_1$) المبين بـ $\text{س}_1 = \text{س} - 1$ فان الدالة تصبح : $\text{ص}_1 = \text{س}_1^2$.

ومثال آخر : $\text{ص} = \dfrac{4\,\text{س}^2 + 1}{2\,\text{س}^2}$ والمرجع الجديد : $\left\{\begin{array}{l} \text{س}_1 = 2\,\text{س}^2 \\ \text{ص}_1 = \text{ص} - 2 \end{array}\right.$

وتصبح الدالة، $\text{ص}_1 = \dfrac{1}{\text{س}_1}$.

٣) خاصيات الدالات



4.2

أ) الدالات الزوجية والفردية :

توجد دالات زوجية وفردية . يقال ان الدالة ص = د (س) فرديه اذا حصل (4.2) التساوى الآتى لكل قيمة س ، د (س) = − د (−س) فيكون الخط البيانى متناظرا بالنسبة للاصل أ ويقال ان الدالة ص = د (س) زوجية اذا حصل التساوى الآتى لكل قيمه س ، د (س) = د (−س) فيكون الخط البيانى متناظرا بالنسبة المحور أ ص.

ب) الدالات الدورية :

اذا حصل التساوى د (س) = د ($\text{س} + \text{س}_1$) يقال ان الدالة : ص = د (س) هى دالة دورية و س_1 هى الدورة .

العماية ذاتها في الفضاء ذي البعدين .

$$3 \quad \begin{cases} \text{س} = \text{د}_1\ (\text{ض}) \\ \text{ص} = \text{د}_2\ (\text{ض}) \end{cases}$$ الدالات المنفصلة

واذا حذفنا المتحول ض تحصل المعادلة :

$$4 \quad \text{د}_1\ (\text{س، ص}) = 0$$

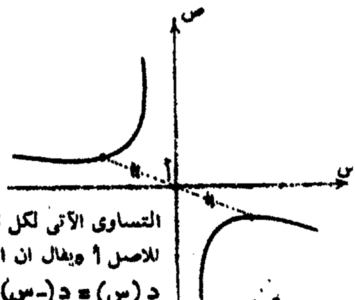
وهي تمثل مستقيما في المستوى أ س، أ ص.

٢) تحولات الاحداثيات

ترتبط الدالة وخطها البياني بمجموعة الاحداثيات التي تعتبر مرجعا لها وقد توجد مراجع اخرى صالحة لتبسيط العمليات الحسابية ومثل ذلك : $\text{ص} = (\text{س} - 1)^2$ فاذا وقع الانتقال الى المرجع ($\text{أ}_1\ \text{س}_1، \text{أ}_1\ \text{ص}_1$) المبين بـ $\text{س}_1 = \text{س} - 1$ فان الدالة تصبح : $\text{ص}_1 = \text{س}_1^2$.

ومثال آخر : $\text{ص} = \frac{4\ \text{س}^2 + 1}{2\ \text{س}^2}$ والمرجع الجديد : $\begin{cases} \text{س}_1 = 2\ \text{س}^2 \\ \text{ص}_1 = \text{ص} - 2 \end{cases}$
وتصبح الدالة، $\text{ص}_1 = \frac{1}{\text{س}_1}$.

٣) خاصيات الدالات



4.2

ا) الدالات الزوجية والفردية :

توجد دالات زوجية وفردية . يقال ان الدالة ص = د (س) فرديه اذا حصل (4.2) التساوي الآتي لكل قيمة س ، د (س) = − د (−س) فيكون الخط البياني متناظرا بالنسبة للاصل أ ويقال ان الدالة ص = د (س) زوجية اذا حصل التساوي الآتي لكل قيمة س ، د (س) = د (−س) فيكون الخط البياني متناظرا بالنسبة للمحور أ ص.

ب) الدالات الدورية :

اذا حصل التساوي $\text{د}(\text{س}) = \text{د}(\text{س} + \text{س}_1)$ يقال ان الدالة : ص = د (س) هي دالة دورية و س_1 هي الدورة .

وتعتبر كل قيمة مضاعفة لـ س_0 دورة ايضا فيكتب :

$$\text{د}(\text{س}) = \text{د}(\text{س} + \text{س}_0) = \text{د}(\text{س} + 2\text{س}_0) = \text{د}(\text{س} + 3\text{س}_0) = \ldots\ldots = \text{د}(\text{س} + \text{ع}\,\text{س}_0)$$

ج) الدالات المتعاكسة :

يوافق كل عدد س عددا ص قيمته د (س) والعكس بالعكس اى انه يوافق لكل عدد ص عددا س قيمته $\text{د}^{-1}(\text{ص})$. فيقال ان $\text{س} = \text{د}^{-1}(\text{ص})$ « الدالة المتعاكسة » او «الدالة المتبادلة».

مثلا :

- $\text{ص} = \frac{3}{1+\text{س}}$ ودالتها المتعاكسة $\text{س} = \frac{3-\text{ص}}{\text{ص}}$
- $\text{ص} = \text{جا}\,\text{س}$ ودالتها المتعاكسة $\text{س} = \text{قوس جا}\,\text{ص}$

وينتج عن المثال الاول انه : $\text{ص} + \text{ص}\,\text{س} - 3 = 0$ ويدل هذا التساوى : $\text{د}(\text{ص} ، \text{س}) = 0$ أنه يحوى دالتين متعاكستين : $\text{ص} = \text{د}_1(\text{س})$ و $\text{س} = \text{د}_2(\text{ص})$.

اتصال الدالات

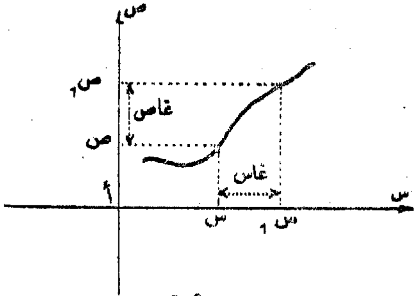
لتعتبر الدالة $\text{ص} = \text{د}(\text{س})$ معينة للقيمة $\text{س} = \text{س}_0$ ولنعطى للمتحول س قيمة قريبة من س_0 وليفرض ان س ينتهى الى س_0 فاذا انتهى س الى حد ح وكان الحد $\text{ح} = \text{د}(\text{س}_0)$ فيقال أن الدالة متصلة للقيمة $\text{س} = \text{س}_0$ او متصلة فى النقطة س_0.

ومثل ذلك : $\text{ص} = \text{س}^2$ دالة متصلة لكل قيمة س.

ويقال ان دالة متصلة فى مجال (أ ، ب) اذا كانت الدالة متصلة فى كل نقطة من هذا المجال .

[illegible]

يوافق لتغير (غا) قيمته غاس للمتحول س تزايد غاص للدالة $\text{ص} = \text{د}(\text{س})$ قيمته $\text{غاص} = \text{د}(\text{س} + \text{غاس}) - \text{د}(\text{س})$. (5.2)



5.2

ويتعلق غاص في آن واحد بـ س (القيمة المعينة للمتحول)
وبـ غاس (تغير ما للمتحول ابتداء من قيمة س).

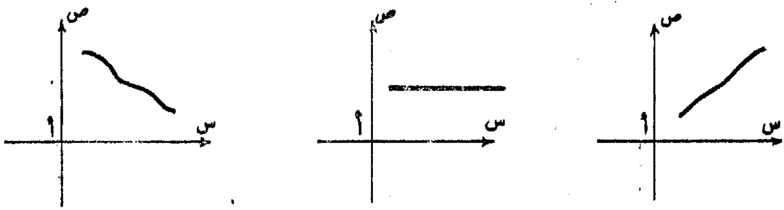
وتعتبر الدالة ص = د (س) معينة في مجال (أ، ب) ويوافق تغير المتحول
غاس = (س + س$_1$) تغير الدالة غاص = د(س$_1$) ـ د (س).

ويمكن ان يحصل أن قيمة النسبة $\frac{غاص}{غاس}$ تحتفظ بعلامة ثابتة في كل المجال
(أ، ب) فيقال أن الدالة ص = د (س) وحيدة التغير وتحصل احدى الحالات الثلاثة :
(6.2)

أ) $\frac{غاص}{غاس} > 0$ فيقال ان الدالة متزايدة في المجال المذكور

ب) $\frac{غاص}{غاس} < 0$ فيقال ان الدالة متناقصة في المجال المذكور

ج) $\frac{غاص}{غاس} = 0$ فيقال ان الدالة ثابتة في المجال المذكور



6.2

مثـــلا :

ص = س + 2 ان الدالة معينة فى المجال (−∞ ، +∞).

واذا اعتبرت النقطتان :

$\left.\begin{aligned}\text{س}_1 &= 1\\ \text{ص}_1 &= 3\end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned}\text{س}_2 &= 3\\ \text{ص}_2 &= 5\end{aligned}\right\}$ يحصل $\left\{\begin{aligned}\text{غاس} &= 2\\ \text{غاص} &= 2\end{aligned}\right.$

ويستنتج أن : $\frac{\text{غاص}}{\text{غاس}} = 1$ وتكون الدالة متزايدة في كل المجال (1 ، 3).

ولنكتب الآن الدالة لاية قيمة لنقطتين : $\left\{\begin{aligned}&(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)\\ &(\text{س}_2 ، \text{ص}_2)\end{aligned}\right.$

مرتبطتين بالعلاقتين : $\left\{\begin{aligned}\text{ص}_1 &= \text{س}_1 + 2\\ \text{ص}_2 &= \text{س}_2 + 2\end{aligned}\right.$

واذا طرحنا هاتين المعادلتين الاخيرتين احداهما من الاخرى حصلت النتيجه :

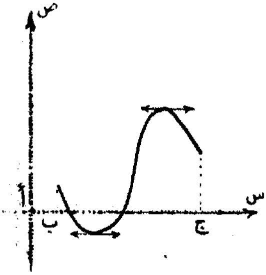
$$\text{ص}_2 - \text{ص}_1 = (\text{س}_2 - \text{س}_1)$$

$$\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = 1$$

وهاته العلاقة صالحة فى كل المجال (−∞ ، +∞) فتكون الدالة متزايدة دائما .

ب) خاصيات الدالات المتصلة

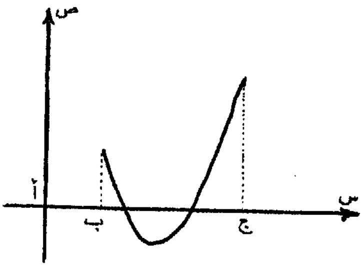
نذكر بعض خاصيات الدالات المتصلة التى تظهر من خلال خطها البيانى .



7.2

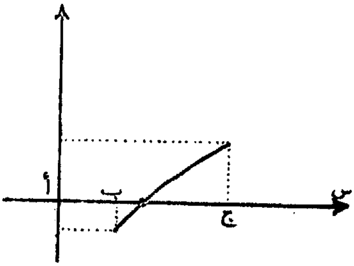
أ) تكون لكل دالة متصلة فى المجال (ب،ج) حد ادني مطلق وحد اقصى مطلق . (7.2)

ب) لا يمكن لدالة متصلة فى مجال
(ب،ج) ان تتحول من قيمة الى أخرى فى هذا المجال
(ب،ج) بدون ان تكون لها كل القيم الموجودة بين
هاتين القيمتين . (8.2)



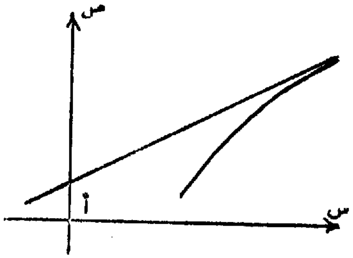
8.2

ج) اذا تغيرت علامة الدالة فى مجال
(ب،ج) حيث تكون الدالة معينة ومتصلة فانها تصفر
مرة على الاقل فى هذا المجال . (9.2)



9.2

د) اذا انتهى البعد بين الخط البيانى
لدالة متصلة وخط آخر الى الصفر فيقال ان الخط الثانى
خط مقارب الى الخط الاول . (10.2)



10.2

تمارين

1 . ابحث عن تكافىء الدالات :

ص = جا س

ص = س جا س

ص = جا^2 س

ص = جتا^2 س

ص = س^2 - 1

ص = (س - 1)^2 .

2 . ادرس المعادلة :

ص = 3 س + 5

وارسم خطها البياني وابحث عن مساحة المثلث المكونة من محوري الاحداثيات والخط البياني .

3 . ابحث عن الدالة التى يكون خط بيانها مستقيما ميله (-1) يمر من النقطة (س = 1 ، ص = 2) . وابحث عن الدالة التى يكون خط بيانها مستقيما موازيا للمستقيم السابق ومارا من النقطة (س = 1 ، ص = 3) .

4 . ادرس الدالة : ص = س^2 + س - 2 وابحث عن احداثيات نقط الالتقاء مع المستقيم ص = س + 2 .

5 . حل : .

2 س + 1 < 0

2 س^2 - 5 س - 3 < 0

$\dfrac{\text{س} + 1}{\text{س} - 2}$ < 1

جتا $\dfrac{\pi\,\text{س}}{\text{ب}}$ < 0 .

6. ابحث عن حد الدالة : $ص = \frac{1 + جتاس}{جاس}$ عندما تنتهى س إلى π .

7. ابحث عن ب ت ث في الدالة . $ص = \frac{ب س + ت}{س + ث}$ يمر خط بيانها من الاصل وليكون المستقيمان $س = 2$ و $ص = 3$ خطين مقاربين .

8. ادرس : $ص = |س|$

9. $ص = \frac{|س|^2 - س^2}{2}$

10. $ص = ظاس + \frac{س}{3}$

11. ما هي الدالة المعاكسة لـ $ص = 2س - 6$

$ص = 4س^2$

12. ادرس الدالة : $ص = قوس جا (جتاس)$

13. ادرس الدالة : $ص = قوس جا (\frac{2س}{1 + س^2})$

الفصل الثالث

الدالات المألوفة

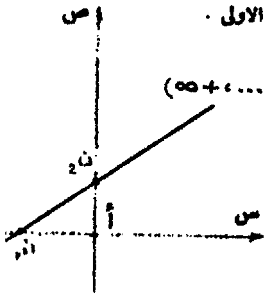
الدالات من الدرجة الاولى

ان الدالات من الدرجة الاولى يكون شكلها كالآتي :

$$\text{ثا}_1\,\text{س} + \text{ثا}_2\,\text{ص} + \text{ثا}_3 = 0$$

وتكون $\text{ثا}_1 ، \text{ثا}_2 ، \text{ثا}_3$ ثوابت واذا كانت $\text{ثا}_2 \neq 0$ فان $\text{ص} = -\frac{\text{ثا}_1}{\text{ثا}_2}\text{س} - \frac{\text{ثا}_3}{\text{ثا}_2}$ اى ان $\text{ص} = \text{ب}\,\text{س} + \text{ج}$ او اذا كانت $\text{ثا}_1 \neq 0$ فان $\text{س} = -\frac{\text{ثا}_2}{\text{ثا}_1}\text{ص} - \frac{\text{ثا}_3}{\text{ثا}_1}$ اى أ

$\text{س} = \frac{1}{\text{ب}}\text{ص} - \frac{\text{ج}}{\text{ب}}$ وهى الدالة المتعاكسة وتكون ايضا من الدرجة الاولى .



1.3

ان الدالة $\text{ص} = \text{ب}\,\text{س} + \text{ج}$ معينة فى المجال $(-\infty ، \ldots ، +\infty)$

- اذا كانت $\text{ب} = 0$ فان $\text{ص} = \text{ج}$ وتكون الدالة ثابتة
- اذا كانت $\text{ب} \neq 0$

فتكون النقطتان : $\text{ن}_1 \left| \begin{matrix} -\frac{\text{ج}}{\text{ب}} \\ 0 \end{matrix} \right.$ و $\text{ن}_2 \left| \begin{matrix} 0 \\ \text{ج} \end{matrix} \right.$

على خط بيانى الدالة . (1.3)

وتسمى $\frac{\text{أ}\,\text{ن}_2}{\text{ن}_1\,\text{أ}} = \text{ب}$ الميل او العامل الزاوى

ويوافق لكل "غاس" ، "غاص"

$$-\left\{\begin{array}{l}\text{ص} + \text{غاص} = \text{ب}\,(\text{س} + \text{غاس}) + \text{ج} \\ \text{ص} \qquad\quad = \text{ب}\,\text{س} + \text{ج}\end{array}\right.$$

وبعد الطرح : $\text{غاص} = \text{ب}\,\text{غاس}$

فتحصل : $\dfrac{\text{غاص}}{\text{غاس}} = \text{ب}$

ويرتبط تزايد الدالة وتناقصها بعلامة قيمة "ب".

حالات خاصة :

1. مستقيم ميله "ب" ومار من نقطة $\text{ن}_1(\text{س}_1، \text{ص}_1)$:

$$\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{ب}(\text{س} - \text{س}_1).$$

2. مستقيم مار من النقطتين $\text{ن}_0(\text{س}_0، \text{ص}_0)$ و $\text{ن}_2(\text{س}_2، \text{ص}_2)$:

$$\frac{\text{ص} - \text{ص}_0}{\text{ص}_2 - \text{ص}_0} = \frac{\text{س} - \text{س}_0}{\text{س}_2 - \text{س}_0}$$

3. مستقيم ميله "ب" ومار من الاصل :

$$\text{ص} = \text{ب}\,\text{س}$$

4. مستقيم موازي للمحور "أ ص" :

$$\text{س} = \text{س}_0$$

واذا كان موازيا للمحور "أ س" فان : $\text{ص} = \text{ص}_0$

5. نقطة تلاقي مستقيمين ن_0 :

$$\left.\begin{array}{l}\text{ص} = \text{ب}_1\text{س} + \text{ج}_1 \\ \text{ص} = \text{ب}_2\text{س} + \text{ج}_2\end{array}\right\}$$

$$\text{ن}_0\left\{\begin{array}{l}\text{س}_0 = \dfrac{\text{ج}_2 - \text{ج}_1}{\text{ب}_1 - \text{ب}_2} \\ \text{ص}_0 = \dfrac{\text{ب}_1\text{ج}_2 - \text{ب}_2\text{ج}_1}{\text{ب}_1 - \text{ب}_2}\end{array}\right.$$

اذا كان المستقيمان متعامدين فان : $\text{ب}_1\,\text{ب}_2 = -1$

الدالات من الدرجة الثانية

تكتب دالات الخطوط البيانية من الدرجة الثانية على الشكل التالى :

$$\text{ب}\,\text{س}^2 + \text{ج}\,\text{ص}^2 + \text{د}\,\text{س}\,\text{ص} + \text{هـ}\,\text{ص} + \text{و}\,\text{س} + \text{ز} = 0$$

ب ، ج ، د ، هـ ، و ، ز ، ثوابت وان عدد نقط تلاقى هذه الخطوط البيانية مع اى مستقيم يكون دائما اثنين.

ونوجد ثلاث حالات خاصة :

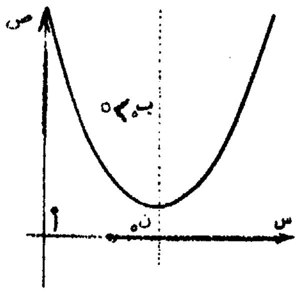
1. $\text{ج} = \text{د} = 0$ فيبقى : $\text{ب}\,\text{س}^2 + \text{هـ}\,\text{ص} + \text{و}\,\text{س} + \text{ز} = 0$ و تحصل من هذه المعادلة الدالة : $\text{ص} = \text{ب}_0\,\text{س}^2 + \text{ج}_0\,\text{س} + \text{د}_0$ التى هى الدالة المثلثة الحدود من الدرجة الثانية .

وتكتب هاته الدالة على الصيغة التالية : $\text{ص} = \text{ب}_0\left(\text{س} + \frac{\text{ج}_0}{2\text{ب}_0}\right)^2 - \frac{\text{ج}_0^2}{4\text{ب}_0} + \text{د}_0$

وعندما تنتهى س الى $\pm\infty$ فان $\left(\text{س} + \frac{\text{ج}_0}{2\text{ب}_0}\right)^2$ ينتهى الى $+\infty$ ولكن "ص" ينتهى الى $-\infty$ او $+\infty$ حسب علامة ب_0 ويلاحظ ان الخط البيانى يحوى نقطتين متطابقتين فى الاتجاه اللانهائى للمستقيم " أ ص" واذا حولنا $\left(\text{س} + \frac{\text{ج}_0}{2\text{ب}_0}\right)$ الى $-\left(\text{س} + \frac{\text{ج}_0}{2\text{ب}_0}\right)$ ، فان "ص" لن يتغير . فيستنتج أن المستقيم $\text{س} = -\frac{\text{ج}_0}{2\text{ب}_0}$ يعتبر محور تناظر للخط البيانى.

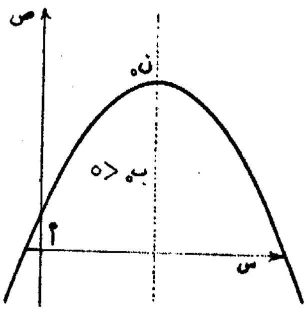
وان نقطة ن_0 التى هى تلاقى (التقاء) الخط البيانى مع محور التناظر

$$\text{ن}_0 \begin{cases} \text{س}_0 = -\frac{\text{ج}_0}{2\text{ب}_0} \\ \text{ص}_0 = \frac{4\text{ب}_0\text{د}_0 - \text{ج}_0^2}{4\text{ب}_0} \end{cases}$$



2.3

تكون النهاية صغرى للخط البيانى اذا كانت $\text{ب}_0 > 0$ فيكون التقعر متجها نحو الأعلى (2.3)



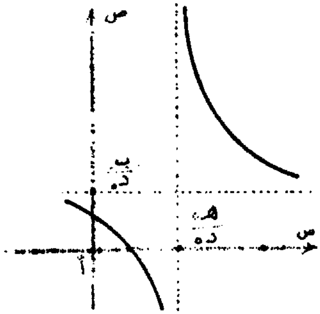
3.3

وتكون النهاية كبرى للخط البيانى اذا كانت $\text{ب}_0 < 0$ فيكون التقعر متجها نحو الاسفل . ويسمى الخط البيانى لهذه الدالة من الدرجة الثانية القطع المكافىء والدالة مكافئية . (3.3)

2 . $ب = ج = 0$ فيبقى : $د س ص + هـ ص + و س + ز = 0$ وتحصل من هذه المعادلة الدالة : $ص = \frac{ب_0 س + ج_0}{د_0 س + هـ_0}$ التى تسمى الدالة التناظرية .

وتعين هذه الدالة فى المجالين : $\left]-\infty , -\frac{هـ_0}{د_0}\right[$ و $\left]-\frac{هـ_0}{د_0} , +\infty\right[$.

واذا كانت قيمة $س = -\frac{هـ_0}{د_0}$ فان الدالة تنتهى الى ∞ ويكون المستقيم $س = -\frac{هـ_0}{د_0}$ خطا مقاربا للخط البيانى (4.3)



4.3

واذا كتبنا الدالة على الشكل التالى :

$$ص = \frac{س\left(ب_0 + \frac{ج_0}{س}\right)}{س\left(د_0 + \frac{هـ_0}{س}\right)}$$

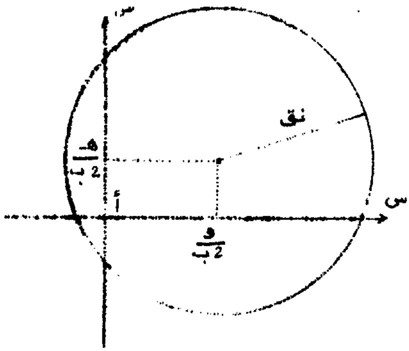
فاذا انتهت س $\longrightarrow \pm\infty$ فان $\frac{ج_0}{س}$ و $\frac{هـ_0}{س}$ ينتهيان الى 0 وينتهى ص الى $\frac{ب_0}{د_0}$ والمستقيم $ص = \frac{ب_0}{د_0}$ الموازى لمحور الفصل يعتبر خطا مقاربا للخط البيانى وان للخط البيانى مستقيمين متقاربين متوازيين ويسمى الخط البيانى قطعا زائدا قائما .

3 . $ب = ج$ و $د = 0$ فيبقى : $ب(س^2 + ص^2) + هـ ص + و س + ز = 0$

وتحصل من هذه المعادلة الدالة : $(س - س_0)^2 + (ص - ص_0)^2 = نق^2$

ويكون خطها البيانى دائرة مركزها (5.3)

$$\begin{cases} س_0 = \frac{و}{2ب} \\ ص_0 = \frac{هـ}{2ب} \end{cases}$$



5.3

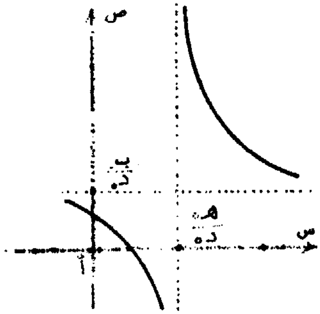
وشعاعها :

$$نق^2 = \frac{و^2 + هـ^2 - 4ب ز}{4ب^2}$$

— 2 . ب = ج = 0 فيبقى : $\text{د}\,\text{س}\,\text{ص} + \text{هـ}\,\text{ص} + \text{و}\,\text{س} + \text{ز} = 0$ وتحصل من هذه المعادلة الدالة : $\text{ص} = \frac{\text{ب}_0\,\text{س} + \text{ج}_0}{\text{د}_0\,\text{س} + \text{هـ}_0}$ التى تسمى الدالة التناظرية .

وتعين هذه الدالة فى المجالين : $\left]-\infty ، -\frac{\text{هـ}_0}{\text{د}_0}\right[$ و $\left]-\frac{\text{هـ}_0}{\text{د}_0} ، +\infty\right[$.

واذا كانت قيمة $\text{س} \to -\frac{\text{هـ}_0}{\text{د}_0}$ فان الدالة تنتهى الى ∞ ويكون المستقيم $\text{س} = -\frac{\text{هـ}_0}{\text{د}_0}$ خطا مقاربا للخط البيانى (4.3)



4.3

واذا كتبنا الدالة على الشكل التالى :

$$\text{ص} = \frac{\text{س}\left(\text{ب}_0 + \frac{\text{ج}_0}{\text{س}}\right)}{\text{س}\left(\text{د}_0 + \frac{\text{هـ}_0}{\text{س}}\right)}$$

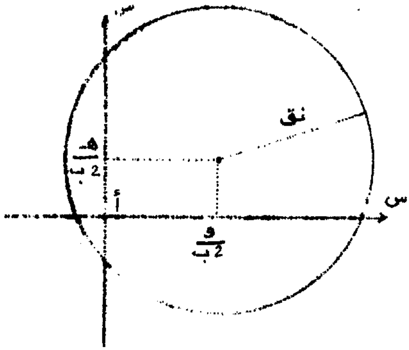
فاذا انتهت $\text{س} \to \pm\infty$ فان $\frac{\text{ج}_0}{\text{س}}$ و $\frac{\text{هـ}_0}{\text{س}}$ ينتهيان الى 0 وينتهى ص الى $\frac{\text{ب}_0}{\text{د}_0}$ والمستقيم $\text{ص} = \frac{\text{ب}_0}{\text{د}_0}$ الموازى لمحور الفصل يعتبر خطا مقاربا للخط البيانى وان للخط البيانى مستقيمين متقاربين متوازيين ويسمى الخط البيانى قطعا زائدا قائما .

— 3 . ب = ج و د = 0 فيبقى: $\text{ب}(\text{س}^2 + \text{ص}^2) + \text{هـ}\,\text{ص} + \text{و}\,\text{س} + \text{ز} = 0$

وتحصل من هذه المعادلة الدالة : $(\text{س} - \text{س}_0)^2 + (\text{ص} - \text{ص}_0)^2 = \text{نق}^2$

ويكون خطها البيانى دائرة مركزها (5.3)

$$\begin{cases} \text{س}_0 = \frac{\text{و}}{2\,\text{ب}} \\ \text{ص}_0 = \frac{\text{هـ}}{2\,\text{ب}} \end{cases}$$



5.3

وشعاعها :

$$\text{نق}^2 = \frac{\text{و}^2 + \text{هـ}^2 - 4\,\text{ب}\,\text{ز}}{4\,\text{ب}^2}$$

د- الدالات المثلثاتية

سبق ان عرفنا الدالات المثلثاتية فى الفصل الاول (2 ـ 1) والعكسية فى الفصل الثانى (2 ـ ٣ ـ ج)

ﻫ) المعادلات المثلثاتية

أ) $\text{جا}\, س = أ$

لا تحل هذه المعادلة الا اذا كان : $|أ| \leqslant 1$ وإذا توفر هذا الشرط فانه يوجد حل ﻫ للمعادلة وهو الحل الوحيد ويكون $-\frac{\pi}{2} \leqslant ﻫ \leqslant \frac{\pi}{2}$ وتستخلص كل الحلول الاخرى بزيادة $2 ثا \pi$ (ثا عدد ثابت) ويكون $س = ﻫ + 2 ثا \pi$

ولا يتغير الجيب اذا بدلنا ﻫ بـ $(\pi - ﻫ)$ فتصبح كل الحلول فى :

$$س = (ﻫ + 2 ثا \pi)$$
$$س = (\pi - ﻫ + 2 ثا \pi)$$

ب) $\text{جتا}\, س = أ$

لا تحل هذه المعادلة الا اذ كان : $|أ| \leqslant 1$ وإذا توفر هذا الشرط فانه يو- حل ﻫ للمعادلة وهو الحل الوحيد ويكون $0 \leqslant ﻫ \leqslant \pi$ وتستخلص كل الحلول الاخرى بزيادة $2 ثا \pi$ (ثا عدد ثابت) ويكون $س = ﻫ + 2 ثا \pi$

ولا يتغير جيب التمام اذا بدلنا ﻫ بـ $(-ﻫ)$ فتصبح كل الحلول فى :

$$س = (\pm ﻫ + 2 ثا \pi)$$

ج) ظا س=أ

اذا اعتبرنا الحل هـ محصورا بين $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ فان (أ) تاخذ كل القيم بين $(-\infty, +\infty)$.

ولا يتغير الظل عندما يبدل هـ بـ (هـ + π) وتصبح كل الحلول في :

$$\text{س} = (\text{هـ} + \text{ن}\pi)$$

د) أ جاس + ب جتاس = ج

وتساوي هذه المعادلة المعادلة الآتية : د جا (س+و) = ج أي :

د (جاس جتاو + جتاس جاو) = ج وينبغي ان يتوفر الشرطان :

$$\begin{cases} \text{د جتا و = أ} \\ \text{د جا و = ب} \end{cases}$$

وتخول هاتان المعادلتان ضبط د و و اللتان مرتبطتان بعلاقتين:

$$\begin{cases} \text{د}^2 = (\text{أ}^2 + \text{ب}^2) \\ \text{ظا و} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}} \end{cases}$$

ولا توجد اذن حلول الا اذا كانت : $|\text{د}| \geqslant \text{ج}$

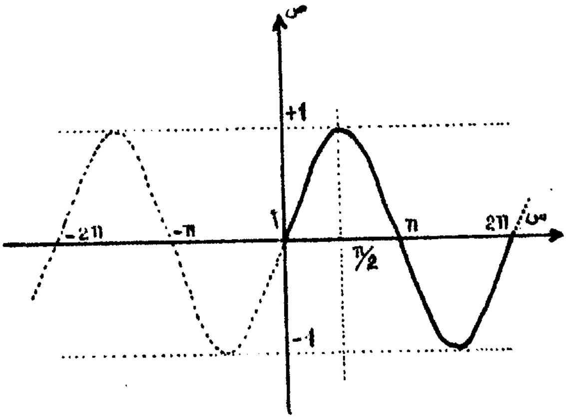
٢) الخطوط البيانية للدالات المثلثاتية

ان الدالتين "جاس" و"جتاس" دوريتان وقيمة دورتهما تساوي 2π واما قيمة دورة "ظاس" فهي π فقط . ويكفي رسم الخط البياني لهذه الدالات لدورة واحدة . وتستخلص الخطوط البيانية الكاملة بانسحاب في اتجاه المحور "أ س".

فلنعتبر الدالة ص = جاس والملاحظ انه اذا تبدلت "س" ب $(\pi + \text{س})$ تغيرت الدالة "ص" الى (– ص). وتكون النقطة π على المحور أ س نطة تناظر للخط البياني

فنكتفي اذن برسم الخط البياني للدالة بين 0 و π .

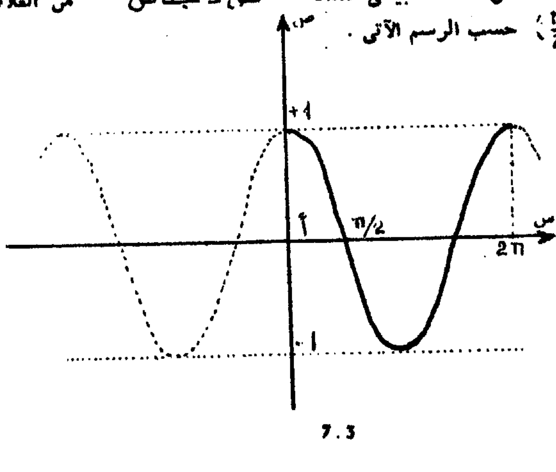
والملاحظ ايضا انه اذا بدلنا "س" بـ $(\pi - س)$ لا تتغير الدالة . ويكون المستقيم $(س = \frac{\pi}{2})$ الموازي لـ أص مستقيم تناظر للخط البياني .



6.3

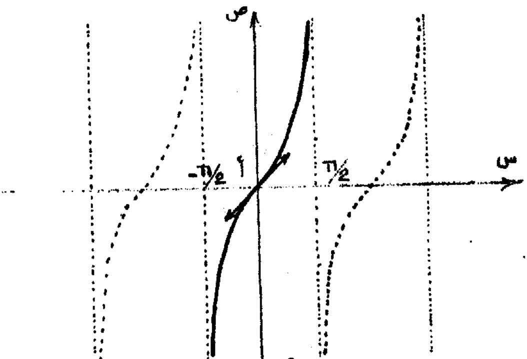
ويتبين من الرسم (6.3) ان الدالة تتزايد من 0 الى 1 عندما تتزايد "س" من 0 الى $\frac{\pi}{2}$
فيكون الخط البياني للدالة ص = جاس الآتي : (6.3)

ونستخلص الخط البياني للدالة ص = جتاس من العلاقة :
جتاس = جا $(س + \frac{\pi}{2})$ حسب الرسم الآتي .



7.3

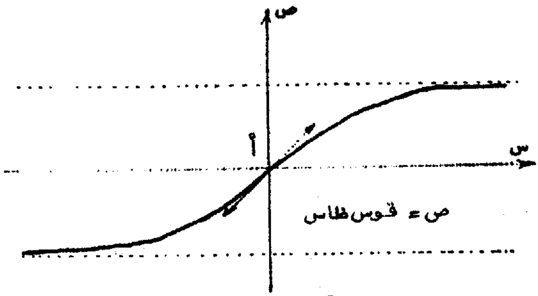
وأما الدالة ص = ظاس فهى تنتهى الى $-\infty$ لقيمة $-\frac{\pi}{2}$. $+\infty$
لقيمة $+\frac{\pi}{2}$. وتصفر فى نقطة الاصل . ويكون خطها البيانى حسب الرسم الآتى :



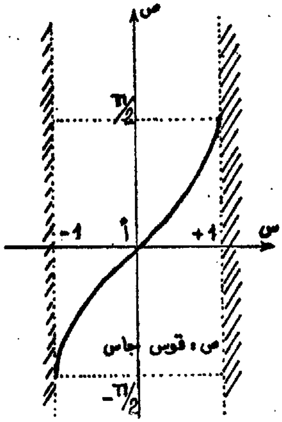
8.3

والملاحظ ان الدالات العكسية متناظرة للدالات الاصلية حسب المحور أم
المنصف للربع الاول . وتستخلص الخطوط البيانية الآتية للدالات :

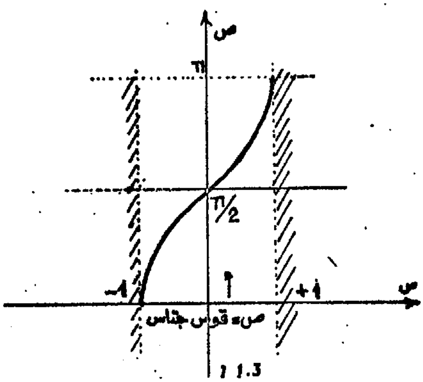
ص = قوس جاس
ص = قوس جتاس
ص = قوس ظاس



9.3



10.3



11.3

تمارين

1. ما هو محور القطع المكافىء : $ص = س^2 + 4س - 1$ وما هي احداثيات قمته؟

2. اكتب دالة القطع المكافىء المار من النقط الثلاثة الآتية .

$$\left.\begin{matrix} س = 1 \\ ص = 1 \end{matrix}\right\} \quad و \quad \left.\begin{matrix} س = 3 \\ ص = 1 \end{matrix}\right\} \quad و \quad \left.\begin{matrix} س = 1 \\ ص = -1 \end{matrix}\right\}$$

3. ادرس الدالة : $ص = \frac{س - 3}{2س + 3}$

4. ادرس وَضَعْ خط بياني الدالتين :

$$\left.\begin{matrix} ص_1 = جا\frac{\pi س}{ب} \\ ص_2 = جا(\frac{\pi س}{ب} + \frac{\pi}{6}) \end{matrix}\right\} \qquad ب > 0$$

5. ادرس الدالة : $ص = جتا \frac{6\pi س}{ب}$ وما هي دورتها ؟

6. ادرس : $ص = س + 2 + |3س - 1|$

7. $ص = \frac{س^2}{3} - س + 3$

8. $ص = س جتا س$

9. $ص = \frac{جا س}{س}$

10. ما هي قيمة "ب" التي يكون بها ، تقعر القطع المكافىء متجها الى اسفل :

$$ص = (2ب^2 - 3ب + 1)س^2 - 3س + \frac{9}{4}$$

والى أية قيمة لـ "ب" يكون القطع المكافى مماسا للمحور أس

11 . ارسم خط البيانى للدالة : $ص = \sqrt{-س}$
وكيف تستخلص هاته الدالة من الدالة $ص = \sqrt{س}$

12 . ما هما بؤرتا القطع الزائد : $س^2 - ص^2 = 1$

الفصل السّابع

الدالاّت الأسيّة والخوارزمية

١ - قوّة عدد

نعرف قوة العدد بالعملية الآتية :

$$ب^{0} \quad ب^{1} \quad ب^{2} \quad ب^{3} \quad \ldots\ldots\ldots ب^{ع}$$

$$1 \quad ب \quad ب \times ب \quad ب \times ب \times ب \quad \underbrace{ب \times \ldots\ldots \times ب}_{\text{ع مرّة}}$$

ونستخلص من هذا التعريف الخاصيتين التاليتين :

- $ب^{ع} \times ب^{ع'} = ب^{ع+ع'}$
- $(ب^{ع})^{ع'} = ب^{عع'} = (ب^{ع'})^{ع}$

ونستطيع ان نعمم هذا التعريف الى الاعداد السالبة :

$$ب^{-ع} = \frac{1}{ب^{ع}}$$

ونستطيع كذلك ان نعممه الى الاعداد الكسرية فنكتب : $ب^{\frac{1}{ع}} = \sqrt[ع]{ب}$

وبصفة عامة يكون : $ب^{\frac{ع'}{ع}} = (\sqrt[ع]{ب})^{ع'}$

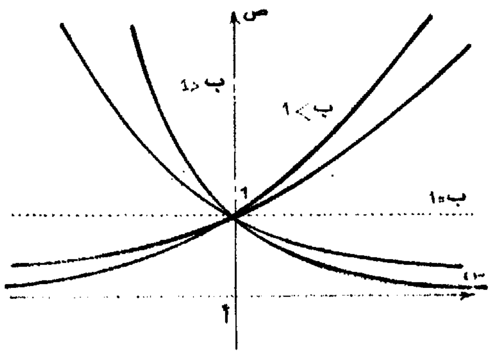
اى ان : $$\underbrace{ب^{ع} = ب \times ب \times \ldots\ldots \times ب}_{ع \text{ مـرّة}}$$

ويكون ع عددا صحيحا او كسريا او أصما او متسام .

الدالة الأسية

وحسب ما بيناه سابقا نستطيع ان نكتب العلاقة التى تربط $ب^{ع}$ بالعدد ع

وهى : $ص = ب^{س}$ وتتغير هاته الدالة حسب قيمة "ب" :(1.4)



1.4

ومشتق الدالة "ص" : $ص' = \underset{غاس \to 0}{نهـاية} \frac{غاص}{غاس}$

$$غاص = ب^{س+غاس} - ب^{س}$$

$$\frac{غاص}{غاس} = ب^{س} \, \frac{ب^{غاس} - 1}{غاس}$$

لما غاس $\longrightarrow 0$ ، $\frac{غاص}{غاس} \longrightarrow ص'$

$ب^{س} \longrightarrow 1$ عندما س $\longrightarrow 0$

فيكون $\frac{ب^{غاس} - 1}{غاس}$ مشتق الدالة ص لقيمة س = 0 أي $ص'(0)$ ونستخلص من ذلك ان

مشتق الدالة ص ، $ص' = ب^{س} . ص'(0)$ $\qquad ص' = ص . ص'(0)$

وتتغير قيمة صَ حسب قيمة ب، ولكنه توجد قيمة معينة e لـ ب

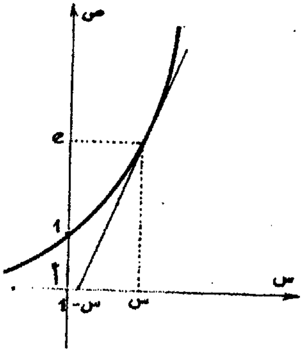
يكون عندها مشتق الدالة صَ(0) = 1 ونكتب اذن :

$$ص = صَ = e^{س}$$

$$e = 2,71828...$$

وهذا العدد متسام مثل العدد π والمعلوم ان عدد هذه الاعداد لا تحصى ولا تعد ولا نعرف منها الا هذين العددين e و π.

ويكون الخط البياني للدالة ص = ب^س، (2.4)



2.4

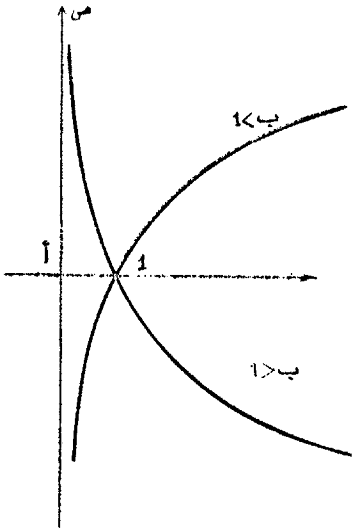
ـ الدالة الخوارزمية

فلنعتبر الدالة العكسية : س = ب^ص

واذا كانت س > 0 يوجد دائما حل للدالة ص ونكتب : ص = خو_ب س

وهذا يدل على ان : خو1 = 0.

ويكون الخط البياني للدالة الخوارزمية : (3.4)



3.4

وتستعمل عادة قاعدتان لـ ب :

1) القاعدة عشرة ويقال ان الدالة الخوارزمية عشرية
2) القاعدة e ويقال ان الدالة الخوارزمية طبيعية

وتوجد جداول لقيمات الدالتين .

ونستخلص من خاصيات الدالة الاسية خاصيات الدالة الخوارزمية

$$\text{خو}(\text{س}_1 \cdot \text{س}_2) = \text{خو س}_1 + \text{خو س}_2$$
$$\text{ع خو س} = \text{خو}(\text{س}^{\text{ع}})$$

واذا تغيرت القاعدة وكتبنا مثلا : $\text{س} = \text{ب}^{\text{ص}_1} = \text{ج}^{\text{ص}_2}$

فلنعتبر الدالة الخوارزمية لقاعدة ب :

$$\text{ص}_1 = \text{خو}_{\text{ب}}\text{س} = \text{ص}_2 \, \text{خو}_{\text{ب}}\text{ج}$$

اى :
$$\text{خو}_{\text{ب}}\text{س} = \text{خو}_{\text{ب}}\text{ج} \times \text{خو}_{\text{ج}}\text{س}$$

ولقسمة "س" تساوى "ب":
$$1 = \text{خو}_{\text{ب}}\text{ج} \times \text{خو}_{\text{ج}}\text{ب}$$

هذه هي علاقة تبديل القواعد.

والملوم ان :
$$\text{خو}\, e = 0{,}43429...$$
$$\text{خو}\, 10 = \frac{1}{0{,}43429} = 2{,}30259....$$

وتحصل العلاقة :
$$\text{خو}\,\text{س} = 2{,}3\,\text{خو}\,\text{س}$$

وكذلك :
$$\text{خو}\left(e^{\text{خوس}}\right) \equiv \text{خوس}$$

ومشتق الدالة $\text{ص} = \text{ب}^{\text{س}}$ $(\text{ب} > 0)$، $\text{ب} = e^{\text{خوب}}$ فتصبح : $\text{ص} = \left(e^{\text{خوب}}\right)^{\text{س}} = e^{\text{س خوب}}$

ونستخلص :
$$\text{ص}' = \text{خوب}\, e^{\text{س خوب}} = (\text{خوب}) \cdot (\text{ب}^{\text{س}}).$$

وكذلك فان مشتق الدالة
$$\text{ص} = \text{خو}\,\text{س} = (\text{خو}\, e)(\text{خو}\,\text{س})$$
$$\text{ص}' = \text{خو}\left(e^{\frac{\text{فاخوس}}{\text{فاس}}}\right) = \frac{1}{\text{س}}\ \text{خو}\, e$$

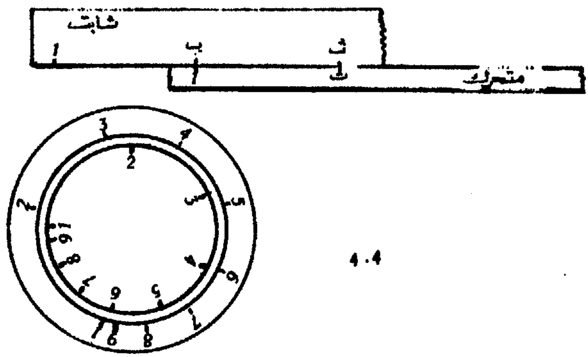
والمشتق الخوارزمى للدالة $\text{ص} = \text{خو}\,\text{ض}$، $\text{ض} = \text{ض}(\text{س})$، $\text{ص}' = \frac{\text{ض}'}{\text{ض}}$

مثـــلا : $\text{ص} = \text{ض}^{\text{ع}} \times \text{ظ}^{\text{غ}}$
$$\text{خو}\,\text{ص} = \text{ع}\ \text{خو}\,\text{ض} + \text{غ}\ \text{خو}\,\text{ظ}$$

والمشتق الخوارزمى :
$$\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{ع}\,\frac{\text{ض}'}{\text{ض}} + \text{غ}\,\frac{\text{ظ}'}{\text{ظ}}$$

الخشبة الحسابية

ان من اهم تطبيقات الدالات الخوارزمية صنع آلات حساب على شكل مسطرة مستطيلة او مستديرة نستعين بها لاجراء العمليات الحسابية المعقدة



4.4

وتتركب هاته الخشبة من جزءين احدهما ثابت والآخر يتحرك بالنسبة اليه .

فاذا أردنا ان نضرب ب . ت مثلا الذى هو (ب . ت) بالآلة المستقيمة فنضع الرقم "1" من الجزء المتحرك مقابل التدريجه "ب" فى الجزء الثابت ونقرأ عليه التدريجة ث المقابلة للتدريجة ث فى الجزء المتحرك واذا رمزنا بـ $\text{ط}_1 ، \text{ط}_2 ، \text{ط}_3$ الاطوال الموافقة للتدريجات ب، ت، ث على الآلة فيحصل من عمليتنا هذه أن : $\text{ط}_1 + \text{ط}_2 = \text{ط}_3$

واذا كانت التدريجات على الجزءين الثابت والمتحرك تدريجات خوارزمية فيكون :

$$\text{خوب} + \text{خوت} = \text{خوث}$$

اى أن : $\text{ب ت} = \text{ث}$

وكذلك فى عملية القسمة اذ اننا نقرأ فى نفس الصورة البيانية (4 - 4): $\text{ط}_3 - \text{ط}_2 = \text{ط}_1$

اى أن : $\text{خوث} - \text{خوت} = \text{خوب}$

$$\text{ب} = \frac{\text{ث}}{\text{ت}}$$

واذا عممنا هذه العملية استطعنا ان نجرى عمليات قوى الاعداد وان نستخلص جذورها كاملة كانت او كسرية .

ولقد اعتبرنا هنا مثال الآلة المستقيمة واذا كان شكل الالة مستديرا فتجرى نفس العمليات.

وتحتوى هذه الآلات عادة على تدريجات أخرى تتعلق بدالات متسامية ونستطيع بهاته التدريجيات ان نحسب قيمات هذه الدالات مثلا :

خوس، $e^{\text{س}}$، جاس، ظاس، ....

علاقات أولر

$$e^{\text{س}+\text{د ص}} = e^{\text{س}}\left(\text{جتاص}+\text{د جاص}\right)$$

د يرمز الى عملية دوران شعاع ما بزاوية تساوى $+\frac{\pi}{2}$

$$\left.\begin{aligned} e^{\text{د س}} &= \text{جتاس}+\text{د جاس} \\ e^{-\text{د س}} &= \text{جتاس}-\text{د جاس} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{aligned} \text{جتاس} &= \frac{e^{\text{د س}}+e^{-\text{د س}}}{2} \\ \text{جاس} &= \frac{e^{\text{د س}}-e^{-\text{د س}}}{2\,\text{د}} \end{aligned}\right.$$

واذا كان س $=\pi$ و 2π :

$$\left.\begin{aligned} e^{\text{د}\pi} &= -1 \\ e^{2\text{د}\pi} &= e^{0} = 1 \end{aligned}\right\}$$

تدل هاتان العلاقتان العجيبتان على ان العددين المتساميين e و π مرتبطان ببعضهما حسب عدد طبيعى: 1 .

ومثلما عرفنا الدالات الدورية نستطيع ان نعرف دالات قطعية بتغيير دس الى س فنكتب :

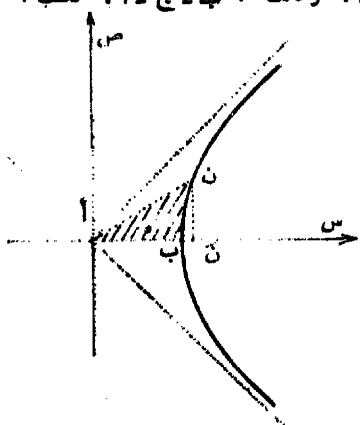
$$\left.\begin{aligned} \text{جتق}\ س &= \frac{e^{س} + e^{-س}}{2} \\ \text{جق}\ س &= \frac{e^{س} - e^{-س}}{2} \\ \text{ظلق}\ س &= \frac{\text{جق}\ س}{\text{جتق}\ س} \end{aligned}\right\}$$

ونستخلص من هذه العلاقات :

$$\left.\begin{aligned} e^{س} &= \text{جتق}\ س + \text{جق}\ س \\ e^{-س} &= \text{جتق}\ س - \text{جق}\ س \\ \text{جتق}^2\ س - \text{جق}^2\ س &= 1 \end{aligned}\right\}$$

ويتبين من ذلك ان الدالات القطعية تعرف مثلما تعرف الدالات الدورية ففي هذه عرفنا جيب الزاوية وجيب تمامها على دائرة معادلتها : $\left(\frac{س}{نق}\right)^2 + \left(\frac{ص}{نق}\right)^2 = 1$ (إذا كانت نق $= 1$)

وكذلك اذا اعتبرنا القطع الزائد : $\left(\frac{س}{ب}\right)^2 - \left(\frac{ص}{ج}\right)^2 = 1$، وكانت : ب $=$ ج $= 1$، نكتب :



5.4

$$\left.\begin{aligned} \text{جتق}\ س &= \text{أنَ} \\ \text{جق}\ س &= \text{نَ ن} \\ \text{ظلق}\ س &= \frac{\text{نَن}}{\text{أنَ}} \end{aligned}\right\}$$

ونرمز بـ "س" لضعفي مساحة السطح الممسوح بواسطة نصف القطر الشعاعي عندما تنتقل النقطة المتحركة "ن" من "ب" الى "ن". (5.4)

وكذلك تعرف الدالات القطعية المعاكسة :

س = قوس جتق ص

س = قوس جيق ص

س = قوس ظق ص

علاقات خاصة

نستعرض بعض العلاقات التى تربط الدالات المعرفة فى هذا الفصل

$$\left(1+\frac{\text{س}}{\text{ع}}\right)^{\text{ع}} \xrightarrow[\text{ع}\to\infty]{} e^{\text{س}}$$

(ع عدد طبيعي او اصم او متسام وَ"س" متحول حقيقي)

$$\left(1+\frac{\text{ط}}{\text{ع}}\right)^{\text{ع}} \xrightarrow[\text{ع}\to\infty]{} e^{\text{ط}}$$ (ط عدد مركب أي ط = س + د ص)

علاقة موافر (Moivre)

$$e^{\text{ع ط}} = (e^{\text{ط}})^{\text{ع}} = (\text{جتا ص} + \text{د جا ص})^{\text{ع}} = (\text{جتا ع ص} + \text{د جا ع ص})$$

ونكتب ايضا :

جتا ط = جتا (س + د ص) = جتا س جتا د ص − جا س جا د ص

= جتا س جتق ص − د جا س جق ص

جتا د ص = جتق ص

جا د ص = د جق ص

ظا د ص = د ظق ص

تمارين

1. ادرس الدالة : $ص = ب^{س}$ $(ب > 1 ، ب < 1)$

2. قارن بين : $خو_{ب} ت$ و $خو_{\frac{1}{ب}} ت$

3. احسب : $خو_{2} 10$ و $خو_{2} 100$

4. ماذا يساوى $خو_{9} 3$ و $خو_{2} 16$

5. ادرس الدالتين : $ص_{1} = e^{س}$ و $ص = س\, e^{س}$

6. ادرس الدالة : $ص = e^{-\sqrt{س^2+س+1}}$

7. احسب $\frac{t}{4}$ و $\pi^{3,14}$ و $\sqrt{e}$ وخوجا $\frac{\pi}{6}$

8. فتش عن الفروع اللانهائية للدالة : $ص = \frac{e^{س}-1}{e^{س}+1}$
ما هى قيمة ص لما س ينتهى الى الصفر؟

9. نفس السؤال للدالة : $ص = 1 - e^{-س}$

10. ما هى الدالة المتعاكسة لـ : $ص = \frac{1}{2} e^{س}$

11. ما هى الدالة المتعاكسة لـ : $ص = (س-1)\, e^{س-1}$
وما هى نهاية س(ص) لما ص ينتهى الى الصفر؟

12. اكتب 13 و 257 فى النظام الثنائى أى فى الاعداد التى قاعدتها 2 .

13. اكتب فى النظام العشرى الاعداد الآتية المكتوبة فى النظام الثنائى :
10000 ،11001 ،10100101101

14. احسب $خو_{2} 17$ و $خو_{2} 0,2$

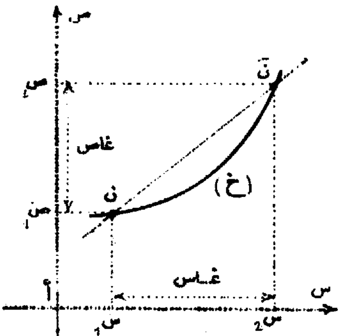
الفصل الخامس

المشتقات والنشر المحدود

١. تعريف المشتقات

اذا اعتبرنا الدالة $\text{ص} = \text{ص}\,(\text{س})$ ونقطتين قريبتين "ن" و "نَ"
فان مسقطى "ن" "نَ" على المحورين الاحداثيين يكوّنان غاس و غاص وتساوى النسبة

$\dfrac{\text{غاص}}{\text{غاس}}$ ؛ $\dfrac{\text{غاص}}{\text{غاس}} = \dfrac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$ وهى ميل المستقيم ن نَ.



1.5

اذا انتهت نَ الى ن انتهت غاس الى الصفر و $\dfrac{\text{غاص}}{\text{غاس}}$ الى مقدار يمثل ميل المستقيم المماس للخط البيانى (خ) فى نقطة ن ، (1.5)

فنكتب :

$$\text{صَ} = \text{صَ}\,(\text{س}) = \lim_{\text{غاس} \to 0} \frac{\text{غاص}}{\text{غاس}}$$

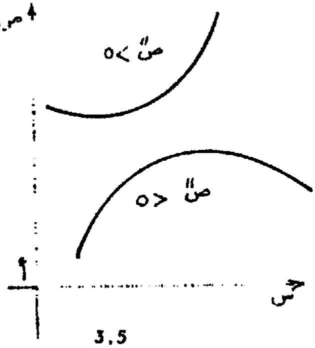
ونرمز بـ "فاس" للمقدار تفاضل س وهو مستقل عن س ويترتب عنه تفاضل صَ (فاص)؛

$$\text{فاص} = \text{صَ}\,(\text{س}).\text{فاس}$$

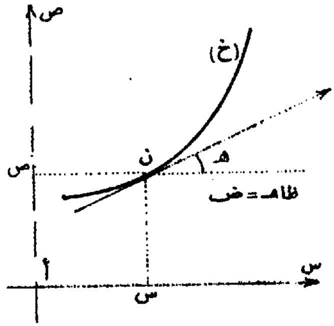
او :

$$\frac{\text{فا ص}}{\text{فا س}} = \text{ص}'(\text{س})$$

ص'(س) هو تعريف مشتق الدالة ص(س) وهو يمثل ميل المماس في "ن" : (س،ص) للخط البياني (خ) (2.5) : ظا هـ = ص'(س)



3.5



2.5

ونعرف المشتق من الدرجة الثانية للدالة ص(س) كالمشتق الا:!. المدالة ص'(س) فنكتب :

$$\frac{\text{فا}^2\,\text{ص}}{\text{فا س}^2} = \text{ص}''(\text{س}) = \lim_{\text{غاس}\to 0} \frac{\text{غاص}'}{\text{غاس}}$$

اذا كانت ص'' > 0 فان تقعر الخط البياني (خ) موجه الى اعلى

و اذا كانت ص'' < 0 فان تقعر الخط البياني (خ) موجه الى اسفل .

ونعرف ص'''(س) كالمشتق من الدرجة الاولى لـ ص'' وهكذا الخ....

$$\text{ص}^{(4)}(\text{س})$$

خاصيات المشتقات :

فلنعتبر الدالتين : سَ (س) ، صَ (س)

1) اشتقاق الجمع :

ص (س) = سَ (س) + صَ (س)

غا ص = غا سَ + غا صَ

$$\frac{\text{غا ص}}{\text{غا س}} = \frac{\text{غا سَ}}{\text{غا س}} + \frac{\text{غا صَ}}{\text{غا س}}$$

ص' (س) = س' (س) + صَ' (س)

يتبين ان مشتق جمع دالتين يساوى جمع مشتق الدالتين

2) اشتقاق الضرب :

- ص = ثا . (س) (ثا = ثابت)

  غا ص = ثا غا ص (س)

$$\frac{\text{غا ص}}{\text{غا س}} = \text{ثا} . \frac{\text{غا ص (س)}}{\text{غا س}}$$

ص' = ثا. ص' (س)

اذا ضربنا الدالة فى ثابت يكون مشتقها مضروبا فى هذا الثابت .

- ص = سَ (س) . صَ (س)

  غا ص = (سَ + غا سَ) . (صَ + غا ص) − سَ صَ

  = سَ غا ص + صَ غا سَ + غا سَ غا صَ

$$\frac{\text{غاص}}{\text{غاس}} = \text{سَ}\,\frac{\text{غاص}}{\text{غاس}} + \text{صَ}\,\frac{\text{غاسَ}}{\text{غاس}} + \frac{\text{غاسَ}}{\text{غاس}}\,.\,\text{غاص}$$

فلما غاس $\rightarrow 0$ فإن غاص $\rightarrow 0$ أيضًا :

$$\text{ص}' = \text{سَ}\,.\,\text{صَ}' + \text{سَ}'\,.\,\text{صَ}$$

٣) اشتقاق الكسر :

$$\text{ص}(\text{س}) = \frac{\text{سَ}(\text{س})}{\text{صَ}(\text{س})}$$

$$\text{غاص} = \frac{\text{سَ} + \text{غاسَ}}{\text{صَ} + \text{غاصَ}} - \frac{\text{سَ}}{\text{صَ}}$$

$$= \frac{\text{صَ}\,.\,\text{غاسَ} - \text{سَ}\,.\,\text{غاصَ}}{\text{صَ}\,.\,(\text{صَ} + \text{غاصَ})}$$

واذا قسمنا على غاس التى تنتهى الى صفر يبقى :

$$\text{ص}' = \frac{\text{سَ}'\,\text{صَ} - \text{سَ}\,\text{صَ}'}{\text{صَ}^2}$$

٤) اشتقاق دالة دالة :

$$\text{ص}(\text{س}) = \text{ض}(\text{سَ}) \quad \text{و} \quad \text{سَ} = \text{سَ}(\text{س})$$

ان الدالة ص تتحول حسب س عن طريق الدالة سَ

$$\text{غاسَ} = \text{سَ}'\ \text{غاس} \quad \text{و} \quad \text{غاص} = \text{ض}'\ \text{غاسَ}$$

واذا عوضنا غاسَ بقيمتها المذكورة حصلت :

$$\text{غاص}(\text{س}) = \text{ض}'(\text{سَ})\,.\,\text{سَ}'\,.\,\text{غاس}$$

واذا قسمنا على غاس

$$\text{ص}'(\text{س}) = \text{ص}'(\text{سَ}) \cdot \text{سَ}'(\text{س})$$

وان هاته العلاقة مهمة جدا ونستطيع ان نكتبها :

$$\frac{\text{فاص}}{\text{فاس}} = \frac{\text{فاص}}{\text{فاض}} \cdot \frac{\text{فاض}}{\text{فاس}}$$

د. مشتقات بعض الدالات المشهورة

1) ص = س

$$\text{ص} = \text{س}$$

$$- \begin{cases} \text{ص} + \text{غاص} = \text{س} + \text{غاس} \\ \text{ص} = \text{س} \end{cases}$$

$$\text{غاص} = \text{غاس}$$

$$\frac{\text{غاص}}{\text{غاس}} = 1$$

$$\underline{\text{ص}' = 1}$$

2) ص = جاس

$$- \begin{cases} \text{ص} + \text{غاص} = \text{جا}(\text{س} + \text{غاس}) \\ \text{ص} = \text{جاس} \end{cases}$$

$$\text{غاص} = \text{جا}(\text{س} + \text{غاس}) - \text{جاس}$$

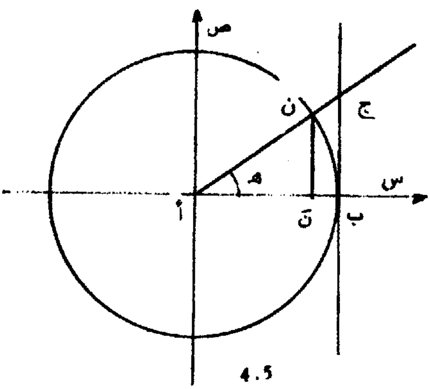
$$\text{غاص} = 2\ \text{جا}\frac{\text{غاس}}{2} + \text{جتا}\left(\frac{\text{س} + \text{غاس}}{2}\right)$$

$$\frac{\text{عـا ص}}{\text{عـا س}} = \frac{\text{جا}\,\frac{\text{عاس}}{2}}{\frac{\text{عاس}}{2}} \cdot \text{جتا}\left(\frac{\text{س + عاس}}{2}\right)$$

لمّا $\text{عـا س} \longrightarrow 0$ ، $\text{جتا}\left(\frac{\text{س + عاس}}{2}\right) \longrightarrow \text{جاس}$

فلنبحث على نهاية :
$$\frac{\text{جا}\,\frac{\text{عاس}}{2}}{\frac{\text{عاس}}{2}} = \frac{\text{جاهـ}}{\text{هـ}} \quad \text{لمّا} \quad \text{هـ} \longrightarrow 0$$

نَ ن < ب ن < ب ج ، أي أن (4.5)



4.5

جاهـ < هـ < ظاهـ

ولنقسم على جاهـ فتصبح

$$1 < \frac{\text{هـ}}{\text{جاهـ}} < \frac{1}{\text{جتاهـ}}$$

لما $\text{هـ} \longrightarrow 0$ فان $\text{جتا} \longrightarrow 1$

والقسمة $\frac{\text{هـ}}{\text{جاهـ}}$ تصبح محصورة بين 1 وكمية تنتهي الى 1 فهي ايضا تنتهي الى 1 والقسمة :

$\frac{\text{جا}\,\frac{\text{عاس}}{2}}{\frac{\text{عاس}}{2}}$ تنتهي اذن الى 1 .

صَ = جتا س

٣) ص = خو س

$$\left.\begin{array}{r} \text{ص + عاص = خو (س + عا س)} \\ \text{ص = خو س} \end{array}\right\} -$$

$$\text{عاص} = \text{خو (س + عا س) − خو س}$$
$$= \text{خو}\left(\frac{\text{س + عاس}}{\text{س}}\right)$$

$$\frac{\text{غاص}}{\text{غاس}} = \frac{1}{\text{غاس}}\ \text{خو}\left(1 + \frac{\text{غاس}}{\text{س}}\right)$$

$$\frac{\text{غاص}}{\text{غاس}} = \text{خو}\left(1 + \frac{\text{غاس}}{\text{س}}\right)^{\frac{1}{\text{غاس}}}$$

$$\frac{\text{غاص}}{\text{غاس}} = \frac{1}{\text{س}}\ \text{خو}\left(1 + \frac{\text{غاس}}{\text{س}}\right)^{\frac{\text{س}}{\text{غاس}}}$$

$$\frac{\text{غاص}}{\text{غاس}} = \frac{1}{\text{س}}\ \text{خو}\left(1 + \frac{1}{\frac{\text{س}}{\text{غاس}}}\right)^{\frac{\text{س}}{\text{غاس}}}$$

لما $\text{غاس} \to 0$ فان : $\frac{\text{س}}{\text{غاس}} \to \infty$ و $\left(1 + \frac{1}{\frac{\text{س}}{\text{غاس}}}\right)^{\frac{\text{س}}{\text{غاس}}} \xrightarrow[\frac{\text{س}}{\text{غاس}} \to \infty]{} e$

$$\frac{\text{غاص}}{\text{غاس}} \to \frac{1}{\text{س}}\ \text{خو}\, e$$

$$\underline{\text{صَ} = \frac{1}{\text{س}}}$$

4) $\text{ص} = e^{\text{س}}$

نستطيع ان نكتب : $\text{س} = \text{خو ص}$ وحسبما تبين سابقا : $\text{سَ} = \frac{1}{\text{ص}}$

ولكن الدالتين س ، ص متعاكستان $\text{صَ} = \frac{1}{\text{سَ}}$ وَ $\text{صَ} = \frac{1}{\frac{1}{\text{ص}}} = \text{ص}$

$$\underline{\text{صَ} = e^{\text{س}}}$$

5) $\text{ص} = \text{ع}^{\text{س}}$

نستطيع أن نكتب $\text{ص} = e^{\text{خوع}^{\text{س}}}$

$$\text{ص} = e^{\text{س}.\text{خوع}}$$

ينبغى علينا ان نشتق دالة الدالة :

$$\text{ص} = e^{\text{ض}} \quad \text{وَ} \quad \text{ض} = \text{ع خو س}$$

$$\text{ص}' = e^{\text{ض}}$$

$$\text{ض}' = \text{ع} \cdot \frac{1}{\text{س}}$$

فتنتج العلاقة :

$$\text{ص}' = e^{\text{ع}\cdot\text{خوس}} \cdot \text{ع} \cdot \frac{1}{\text{س}}$$

$$\text{ص}' = \text{س}^{\text{ع}} \cdot \frac{\text{ع}}{\text{س}}$$

$$\underline{\text{ص}' = \text{ع} \cdot \text{س}^{\text{ع}-1}}$$

وقع البراهن على هاته العلاقة بدون ان نضع اى تحديد للعدد فهو عدد طبيعى او أصم أو متسامى أو مركب ... مثال ذلك :

$$\text{ص} = \text{س}^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{ص}' = \frac{1}{2}\,\text{س}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{ص}' = \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}$$

3) ص = جتا س

$$\text{ص}' = -\,\text{جاس}$$

$$\text{ص} = \text{جتا}^2\,\text{س} \longrightarrow \text{ص}' = -2\,\text{جاس جتا س}$$

$$\text{ص} = \text{ظا س} \longrightarrow \text{ص}' = \frac{1}{\text{جتا}^2\,\text{س}}$$

$$\text{ص} = \text{خو}\,|\text{جتا س}| \longrightarrow \text{ص}' = -\,\text{ظا س}$$

يرتكز برهان هذه النتائج على قانون اشتقاق دالة الدالـة . وينبغى حلهـا كتمـاريـــن .

٧) الاشتقاق الخوارزمي

فلنفترض الدالة $\text{ص} = \text{خو}\,\text{ض}$ حيث $\text{ض} = \text{ض}(\text{س})$ فان مشتق

ص هو $\text{ص}'$:

$$\text{ص}' = \frac{\text{ض}'}{\text{ض}}$$

فلذلك تسمى هاته القسمة المشتق الخوارزمي .

واذا كانت الدالة $\text{ص} = \text{ض}^{\text{ع}} \times \text{ظ}^{\text{غ}}$ حيث ض، ظ دالتين تابعتين لـ س

و ع، غ ثابتان فخوارزمي هذه الدالة :

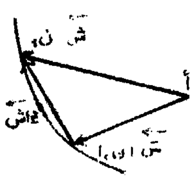
$$\text{خو}\,\text{ص} = \text{ع}\,\text{خو}\,\text{ض} + \text{غ}\,\text{خو}\,\text{ظ}$$

ومشتقها الخوارزمي :

$$\frac{\text{ص}'}{\text{ص}} = \text{ع}\,\frac{\text{ض}'}{\text{ض}} + \text{غ}\,\frac{\text{ظ}'}{\text{ظ}}$$

وتستعمل هاته العلاقة خاصة في حساب الاخطاء .

4) اشتقاق شعاعي



5.5

نفرض شعاعا متحولا : $\overleftarrow{\text{ش}} = \overleftarrow{\text{ش}}(\text{ز})$ ونيمته

في الزمن ز_0 و ز_1 : $\overleftarrow{\text{ش}}(\text{ز}_0)$ و $\overleftarrow{\text{ش}}(\text{ز}_1)$

ففي المدة

$$\text{غا}\,\text{ز} = \text{ز}_1 - \text{ز}_0$$

يتغير الشعاع بقيمة :

$$\text{غا}\overleftarrow{\text{ش}} = \overleftarrow{\text{ش}}(\text{ز}_1) - \overleftarrow{\text{ش}}(\text{ز}_0)$$

فنكتب الشعاع المشتق $\overleftarrow{\text{ش}}'$ من الشعاع $\overleftarrow{\text{ش}}$: $\overleftarrow{\text{ش}}'(\text{ز}) = \text{نهاية}_{\text{غاز} \to 0} \dfrac{\text{غا}\overleftarrow{\text{ش}}}{\text{غا}\,\text{ز}}$

واذا كانت المركبات $\overleftarrow{\text{ش}}(\text{ز})$: $\text{س}(\text{ز})$، $\text{ص}(\text{ز})$، $\text{ط}(\text{ز})$

نستنتج :

$$\overleftarrow{\text{ش}}' = \frac{\text{فا}\overleftarrow{\text{ش}}}{\text{فا}\,\text{ز}} = \overleftarrow{\text{ج}}\,\frac{\text{فاس}}{\text{فاز}} + \overleftarrow{\text{ح}}\,\frac{\text{فاص}}{\text{فاز}} + \overleftarrow{\text{خ}}\,\frac{\text{فاط}}{\text{فاز}}$$

اشتقاق دالة ذات متحولات متعددة

فلنعتبر الدالة : ض = ض (س، ص) ولنفرض ان س متحولا وَ ص ثابتا

فيكون مشتق الدالة بالنسبة لِـ س :

$$\frac{\text{تف ض}}{\text{تف س}} = \frac{\text{تف ض(س،ص)}}{\text{تف س}}$$

("تف" يعني تفاضل جزئي)

وكذلك لمشتق الدالة بالنسبة لِـ ص ويبقى س ثابتا ·

$$\frac{\text{تف ض}}{\text{تف ص}} = \frac{\text{تف ض (س،ص)}}{\text{تف ص}}$$

ونستطيع ان نعمم هاته العمليه على الدالات ذات المتحولات المتعددة مثلا :

ض = ض (س ، ص ، ط)

حيث توجد عادة دالة على الشكل الآتي :

$$\text{غا ض} = \frac{\text{تف}^2\text{ ض(س،ص،ط)}}{\text{تف س}^2} + \frac{\text{تف}^2\text{ض(س ، ص ، ط)}}{\text{تف ص}^2} + \frac{\text{تف}^2\text{ض (س، ص ، ط)}}{\text{تف ط}^2}$$

وتسمى هذه الدالة لابلاسية الدالة ض

وتكتب فا ض = ك . فا س + ل . فا ص + م . فا ط اذا توفرت الشروط التالية :

$$\frac{\text{تف ك}}{\text{تف ص}} = \frac{\text{تف ل}}{\text{تف س}}$$

$$\frac{\text{تف ك}}{\text{تف ط}} = \frac{\text{تف م}}{\text{تف س}}$$

$$\frac{\text{تف ل}}{\text{تف ط}} = \frac{\text{تف م}}{\text{تف ص}}$$

وتسمى الدالة فا ض تفاضلا تاما مضبوطا اذ انه تصبح :

$$\text{ك} = \frac{\text{تف ض}}{\text{تف س}}$$

$$\text{ل} = \frac{\text{تف ض}}{\text{تف ص}}$$

$$\text{م} = \frac{\text{تف ض}}{\text{تف ط}}$$

٥. عبارة دالة متعددة الحدود وتابعة لمشتقاتها

ليكن : $\text{ص}(\text{س}) = \text{ب}_0 + \text{ب}_1\,\text{س} + \text{ب}_2\,\text{س}^2 + \cdots\cdots + \text{ب}_\text{ع}\,\text{س}^\text{ع}$

ومشتقاتها :

$$\text{ص}'(\text{س}) = \text{ب}_1 + 2\,\text{ب}_2\,\text{س} + 3\,\text{ب}_3\,\text{س}^2 + \cdots\cdots + \text{ع}\,\text{ب}_\text{ع}\,\text{س}^{\text{ع}-1}$$

$$\text{ص}''(\text{س}) = 2\text{ب}_2 + \cdots\cdots$$

$$\vdots$$

$$\text{ص}^{(\text{ع})}(\text{س}) = \text{ع}(\text{ع}-1)(\text{ع}-2)\cdots\cdots 3.2.1.\,\text{ب}_\text{ع}$$

ويستنتج :

$$\text{ب}_0 = \text{ص}(0)$$

$$\text{ب}_1 = \text{ص}'(0)$$

$$\text{ب}_2 = \frac{1}{2!}\,\text{ص}''(0)$$

$$\vdots$$

$$\text{ب}_\text{ع} = \frac{1}{\text{ع}!}\,\text{ص}^{(\text{ع})}(0)$$

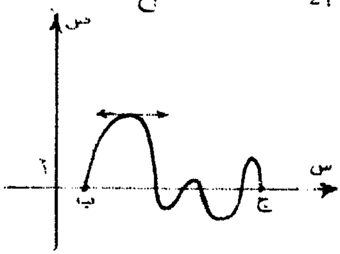
فتصبح عبارة الدالة :

$$\text{ص}(\text{س}) = \text{ص}(0) + \frac{\text{س}}{1!}\,\text{ص}'(0) + \frac{\text{س}^2}{2!}\,\text{ص}''(0) + \cdots + \frac{\text{س}^\text{ع}}{\text{ع}!}\,\text{ص}^{(\text{ع})}(0)$$

وتسمى هذه العبارة عبارة ماك لوران *Mac Laurin*

٦. قانون النمو المحدود

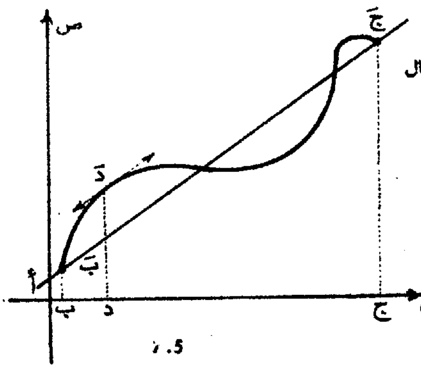
١) قانون رول *Rolle*



6.5

اذا كانت قيمة الدالة ص(س) متساوية في س = ب و س = ج وكانت مستمرة وقابلة للاشتقاق فان مشتقها يصفر مرة على الاقل في المجال (ب، ج) .(6.5)

٢) قانون النمو المحدود



٪ .5

توجد نقطة د لكل خط بيانى

للدالة ص(س) المستمرة والقابلة للاشتقاق فى مجال

(ب،ج) حيث تكون ب < د < ج (7.5)

$$\text{ص}(\text{ج}) - \text{ص}(\text{ب}) = (\text{ج} - \text{ب})\ \text{ص}'(\text{د})$$

وتكتب ايضا هذه العلاقة فى الصيغة التالية :

$$\text{ص}(\text{س} + \text{ت}) - \text{ص}(\text{س}) = \text{ت}\ \text{ص}'(\text{س} + \text{هـ ت})$$

$$0 < \text{هـ} < 1$$

$$\text{ص}(\text{س} + \text{ت}) = \text{ص}(\text{س}) + \text{ت}\ \text{ص}'(\text{س} + \text{هـ ت})$$

وتعميما لهاته العلاقة :

$$\text{ص}(\text{س}+\text{ت}) = \text{ص}(\text{س}) + \frac{\text{ت}}{1!}\text{ص}'(\text{س}) + \frac{\text{ت}^2}{2!}\text{ص}''(\text{س}) + \dots + \frac{\text{ت}^{\text{ع}}}{\text{ع}!}\text{ص}^{(\text{ع})}(\text{س}) + \frac{\text{ت}^{\text{ع}+1}}{(\text{ع}+1)!}\text{ص}^{(\text{ع}+1)}(\text{س}+\text{هـ ت})$$

وتسمى هذه العلاقة علاقة تايلور *Taylor* لدالة ما أو نشرها المحدود .

واذا كانت س = 0 و ت = س نستخلص :

$$\text{ص}(\text{س}) = \text{ص}(0) + \frac{\text{س}}{1!}\text{ص}'(0) + \frac{\text{س}^2}{2!}\text{ص}''(0) + \dots\dots\dots + \frac{\text{س}^{\text{ع}}}{\text{ع}!}\text{ص}^{(\text{ع})}(0) + \frac{\text{س}^{\text{ع}+1}}{(\text{ع}+1)!}\text{ص}^{(\text{ع}+1)}(\text{هـ س})$$

وهذه عبارة ماك لوران لاية دالة كانت ، ومثل ذلك : ص = جاس ص(0) = 0

ص' = جتاس ص'(0) = 1

ص'' = −جاس ص''(0) = 0

ص''' = −جتاس ص'''(0) = −1

$\text{ص}^{(4)}$ = جاس $\text{ص}^{(4)}(0) = 0$

$\text{ص}^{(5)}$ = جتاس $\text{ص}^{(5)}(0) = 0$

فنكتب : $\text{جا س} = \text{س} - \frac{\text{س}^3}{3!} + \frac{\text{س}^5}{5!} + \dots\dots\dots$

وهذه العلاقة تمثل النشر المحدود لـ جاس

٤- النشر التسلسلي

لنفترض المتتالية اللامتناهية الآتية : $ض_1$ ، $ض_2$ ، $ض_3$ ، .... ، $ض_ع$ ، ....
وتعترف المتسلسلة بكونها جمع عناصر المتتالية :

$$ج_ع = ض_1 + ض_2 + ض_3 + \ldots\ldots + ض_ع$$

ومن المعلوم أننا نعرف كيف تكوّن $ض_ع$ ومثال ذلك : $ض_ع \frac{1}{ع} \leftarrow ج_ع = 1 + \frac{1}{2}\ \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{ع}$

وتقتضي المسألة على ان نعرف هل للعبارة $ج_ع$ جمع ينتهي الى ثابت معين ، ويقال فى هذه الحالة ان $ج_ع$ متقاربة ، او لا ينتهي الى ثابت وفى هذه الحالة يقال ان $ج_ع$ متباعدة .

$$ج_ع \xrightarrow[ع \to \infty]{} ثا \quad متقاربة \ (قا)$$

$$ج_ع \xrightarrow[ع \to \infty]{} \infty \quad أوغيرها، متباعدة (با)$$

مثلا، المتتالية الهندسية $ض_ع = أب^ع$: (أ، ب ثابتان)

$$ج_ع = أ + أب + أب^2 + \ldots\ldots + أب^ع$$

$$\frac{ض_{ع+1}}{ض_ع} = \frac{أب^{ع+1}}{أب^ع} = ب$$

$$ب < 1 \longrightarrow قا$$

$$ب > 1 \longrightarrow با$$

فلنبحث عن الثابت الذى تنتهى اليه $ج_ع$ عندما تكون متقاربة اى ان $ب < 1$:

$$\left.\begin{aligned} ج_ع &= أ + أب + أب^2 + \ldots\ldots + أب^ع \\ ب \times ج_ع &= أب + أب^2 + \ldots\ldots\ldots + أب^ع + أب^{ع+1} \end{aligned}\right\} -$$

$$ج_ع (1 - ب) = أ + 0 + 0 + \ldots\ldots + 0 - أب^{ع+1}$$

والمعلوم أن $أب^{ع+1} \xrightarrow[ع \to \infty]{} 0$ اذ أن $ب < 1$ ونستخلص :

$$ج_ع = \frac{أ}{1-ب}$$

ومثل آخر : **المتتالية الحسابية :** $ض_ع = \left[أ + (ع-1)ب\right]$

$$ج_ع = أ + (أ+ب) + (أ+2ب) + \dots\dots + \left[أ+(ع-1)ب\right]$$

ان هذه المتسلسلة متباعدة اذ ان $ض_ع$ لا ينتهي الى صفر .

$$+\begin{cases} ج_ع = أ + (أ+ب) + (أ+2ب) + \dots\dots + \left[أ+(ع-1)ب\right] \\ ج_ع = \left[أ+(ع-1)ب\right] + \dots \qquad \dots + أ \end{cases}$$

$$2ج_ع = ع\left(2أ + \overline{ع-1}\,ب\right)$$

$$ج_ع = \frac{ع}{2}\left(أ + ض_ع\right)$$

معيار التقارب

أ) معيار كوشي *Cauchy* الاول

لنفترض متتالية جميع عناصرها موجبة . واذا حصلت العلاقة :

$$\sqrt[ع]{ض_ع} < ثا \quad و \quad ثا < 1$$

ابتداء من رتبة معينة ع فتكون المتسلسلة متقاربة وبيان ذلك : $0 < \sqrt[ع]{ض_ع} < ثا < 1$

فلنضرب هذه العلاقة ع مرة ببعضها ببعض : $0 < ض_ع < ثا^ع < 1$ وبما ان المتسلسلة $ثا^ع$ متقاربة

حسبما ذكرنا وَ $ض_ع$ أصغر منها فبديهي ان $ض_ع$ متقاربة ايضا .

فالقاعدة تقتضي على بحث تطور $\sqrt[ع]{ض_ع}$ لما $ع \to \infty$.

مثلا ، $\text{ض}_\text{ع} = \left(\text{جتا}\,\frac{1}{\text{ع}}\right)^{\text{ع}^2}$ $\qquad \sqrt[\text{ع}]{\text{ض}_\text{ع}} \longrightarrow \text{هـ}^{-\frac{1}{2}} < 1$

فتكون المتسلسلة متقاربة .

ب) معيار دالمبار *D'Alembert*

فلنفرض المتتالية $\text{ض}_\text{ع} > 0$ فاذا حصلت ابتداء من رتبة معينة ع العلاقة :

$\frac{\text{ض}_{\text{ع}+1}}{\text{ض}_\text{ع}} < \text{ثا} < 1$ فتكون المتسلسلة متقاربة واذا كانت $\text{ثا} \geqslant 1$ فتكون المتسلسلة متباعدة .

$$\times \left\{ \begin{array}{l} 0 < \frac{\text{ض}_{\text{ع}+1}}{\text{ض}_\text{ع}} < \text{ثا} < 1 \\ 0 < \frac{\text{ض}_{\text{ع}+2}}{\text{ض}_{\text{ع}+1}} < \text{ثا} < 1 \\ \text{-----------} \end{array} \right.$$

$$0 < \frac{\text{ض}_{\text{غ}+1}}{\text{ض}_\text{ع}} < \text{ثا}^{\text{غ}+1-\text{ع}} < 1$$

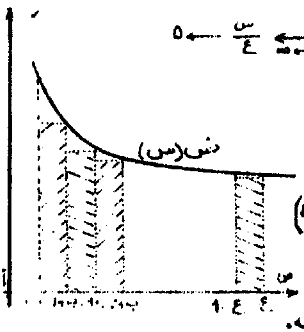
$$0 < \text{ض}_{\text{غ}+1} < \text{ض}_\text{ع}\,\text{ثا}^{\text{غ}+1-\text{ع}}$$

يمثل $\text{ض}_\text{ع}\,\text{ثا}^{-\text{ع}}$ عددا ثابتا فليكن أ فتحصل العلاقة : $0 < \text{ض}_{\text{غ}+1} < \text{أ}.\text{ثا}^{\text{غ}+1}$

فتكون عناصر المتسلسلة أصغر من عناصر المتسلسلة الهندسة حيث ($\text{ثا} < 1$) وهى متقاربة فتكون المتسلسلة $\text{ض}_{\text{غ}+1}$ متقاربة أيضا .

وتقتضى القاعدة على تكوين $\frac{\text{ض}_{\text{ع}+1}}{\text{ض}_\text{ع}}$ ومقارنتها بواحد .

فمثلا ، $\text{ض}_\text{ع} = \frac{\text{س}^{\text{ع}-1}}{(\text{ع}-1)!}$ وتكون $\frac{\text{ض}_{\text{ع}+1}}{\text{ض}_\text{ع}} \xrightarrow[\text{ع}\to\infty]{} \frac{\text{س}}{\text{ع}} \longrightarrow 0$



8.5

ج) معيار كوشى الثانى

لنفرض المتتالية $\text{ض}_\text{ع}$ والدالة الموافقة ض (س) (8.5)

فان تكامل $\int_{\text{أ}}^{\infty} \text{ض}(\text{س})\,\text{ء س}$ والمتسلسلة $\sum \text{ض}_\text{ع}$ يكونان متقاربين او متباعدين فى آن واحد .

وتقتضى القاعدة على البحث عن تطور التكامل المكوّن فى صورة المتسلسله.

مثلاً: ضع $= \frac{1}{ع^{هـ}}$ ، هـ ثابت: $1 <$ هـ $\longleftarrow$ قا

$1 \geqslant$ هـ $\longleftarrow$ با

للبحث على نهاية $ع^{هـ} \times$ ضع لمّا ع $\longrightarrow \infty$:

1) النهاية $\neq 0$: $1 <$ هـ ضع قا

$1 \geqslant$ هـ ضع با

2) النهاية $= 0$ $1 <$ هـ ضع قا

3) النهاية $\longrightarrow \infty$ $1 \geqslant$ هـ ضع با

تمارين

1. اشتق الى الدرجة الثانية بالنسبة للزمن «ز» : $ص_1 =$ جاه ز

$ص_2 =$ جتاه ز

وفتش عن العلاقة بين ص و $\ddot{ص}$.

2. ابحث عن مشتق : ص = ظتا س

3. نفس السؤال : ص = قوس ظاس

4. نفس السؤال : ص = $e^{جتا س}$

5. نفس السؤال : ص = $e^{س}$ جتا 3 س

6. نفس السؤال : ص = (س-1) $e^{س}$ جا س

7. اكتب علاقة ماك لوران للدالة المتعددة الحدود التالية :

$ص(س) = 3 س^5 - 2 س^4 - 3 س^2 + 4 س - 5$

8. نفس السؤال للدالة :

$ص(س) = (س-4)(س-5)(س-6)$

9. فلنفترض الدالة ص = $\frac{2}{س-2}$ ما هي العلاقة التى تربط بين ص و $\acute{ص}$ ؟

10. فلنفترض الدالة ص = خو (2 س-3) ، ما هي العلاقة التى توجد بين $\acute{ص}$ و $\ddot{ص}$ ، مستقلة عن س ؟

11. الى اى حد ينتهى ص = خو(1+س) - س عندما ينتهى س الى صفر .

12. ما هو النشر المحدود الى الدرجة الثالثة · ص = $\sqrt{1-س}$

13. ما هو النشر المحدود الى الدرجة الثالثة : ص = ظاس انطلاقا من نشر جاس وَ جتاس ؟

14. ابحث عن النشر المحدود حول الصفر والى الدرجة الرابعة للدالة

$$ص = خو\left(\frac{\text{جاس}}{\text{س}}\right)$$

واستخلص من ذلك النشر المحدود للدالة : ص = خو |جاس|

13. ما هو النشر المحدود الى الدرجة الثالثة : ص = ظاس انطلاقا
من نشر جاس وَ جتاس ؟

14. ابحث عن النشر المحدود حول الصفر والى الدرجة الرابعة للدالة

ص = خو (جاس/س)

واستخلص من ذلك النشر المحدود للدالة : ص = خو |جاس|

الفصل السادس

التّكامل

لقد عرفنا تفاضل الدالة ص(س)

فاص = صً (س) فاس

صً(س) = $\frac{\text{فاص}}{\text{فاس}}$ = نهاية $_{\text{غاس} \to 0}$ $\frac{\text{غاص}}{\text{غاس}}$

١- التكامل اللامحدود :

يقال : صَ(س) دالة اساسية للدالة ص(س) أو دالة تكاملية للدالة ص(س) عندما تحصل العلاقة : صَ'(س) = ص(س) وبصفة عامة :

[صَ(س) + ثا]' = صَ'(س) = ص(س)

فنكتب

$\frac{\text{فاصَ(س)}}{\text{فاس}}$ = ص(س)

فاصَ(س) = ص(س) فاس

صَ(س) = ∫ ص(س) فاس + ثا

مثلاً: ص (س) = 2 س

فا ص (س) = 2 س فاس

ص (س) = كا 2 س فاس + ثا

ص (س) = س² + ثا

ونستخلص من البحث الذى قمنا به فى الفصل الخامس المتعلق بالمشتقات بعض الدالات التكاملية العادية :

كا فاس = س + ثا

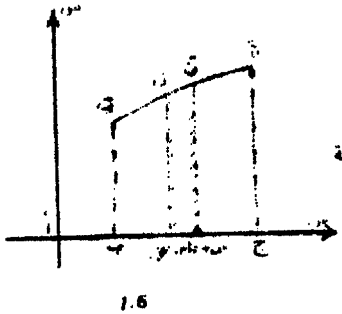
كا سᶜ فاس = $\frac{1}{ع+1}$ س^(ع+1) + ثا (ع ≠ −1)

كا $\frac{فاس}{س}$ = خو |س| + ثا

كا eˢ فاس = eˢ + ثا

كا جتاس فاس = جاس + ثا

2- التمثيل الهندسي للتكامل



1.6

لنفترض الدالة ص = ص(س) مستمرة فى المجال (ب، ج) وتوجد فيه دالة صَ(س) حيث تكون ص (س) الدالة المشتقة لـ صَ (س).

ولنفرض نقطتين ن نَ على الخط البيانى للدالة ص(س) فى المجال (ب، ج) : ن |س ص نَ |س+فاس صَ

ولنفترض أنه لما تكون س فى المجال (ب، ج)، ص (س) > 0 فالمعلوم أن المساحة غا م المحصورة بين أ س والخط البيانى والعمودين ن نَ تكون دائما مربوطة بالعلاقة الآتية : ص. غاس < غام < صَ. غاس

ونستخلص من هذه العلاقة : $ص < \frac{غا م}{غا س} < ص$

ولما نَ تنتهى الى ن ، صَ تنتهى الى ص اى ان $\frac{غا م}{غا س}$ تنتهى الى ص(س)

$$صَ \longrightarrow ص \longrightarrow ص(س)$$

$$\frac{غا م}{غا س} \longrightarrow م'(س) = ص(س)$$

فنقول ان الدالة م(س) هى الدالة التكاملية للدالة ص(س) وهى تمثل المساحة المنحصرة بين أ س والخط البيانى للدالة ص(س) .

أساليب التكامل

(أ) ان التكامل عملية عكسية للتفاضل فلذلك نستعمل الاساليب التى بيناها فى فصل التفاضل ومثال ذلك :

$$ص' = 0 \longrightarrow ص = ثا$$

وقد بينا انه اذا كانت : $ص = ثا . ض(س)$ ، $ص' = ثا . ض'(س)$

اى ان : $كا\ ثا . فا ض = ثا . ض + ثَا$

وقد بينا ايضا انه اذا كانت : $ص = ض . ظ$ ، فتكون $ص' = ض' ظ + ض ظ'$ فنستخلص :

$$\frac{فا ص}{فا س} = ظ \frac{فا ض}{فا س} + ض \frac{فا ظ}{فا س}$$

$$فا ص = ظ\ فا ض + ض\ فا ظ$$

والمعلوم ان : $فا ص = فا(ض . ظ) \longrightarrow ض\ فا ظ = فا(ض.ظ) - ظ\ فا ض$

واذا أجرينا عملية التكامل على هذه العلاقة :

$$كا ض\ فا ظ = كا\ فا(ض.ظ) - كا ظ\ فا ض$$

$$كا ض\ فا ظ = ض ظ - كا ظ\ فا ض$$

وتسمى هذه القاعدة "قاعدة التكامل بالتجزئة"

ومثال ذلك : $\text{كا}\ \text{س}.\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{فاس}$

فلنضع : $\left\{\begin{array}{l}\text{س} = \text{ض} \\ \text{هـ}^{\text{س}}\text{فاس} = \text{فاض}\end{array}\right.$ ومنها $\left\{\begin{array}{l}\text{فاض} = \text{فاس} \\ \text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}\end{array}\right.$

واذا طبقنا القاعدة المذكورة تحصلنا على :

$$\text{كا}\ \text{س}.\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{فاس} = \text{س}\ \text{هـ}^{\text{س}} - \text{كا}\ \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{فاس}$$

$$= \text{س}\ \text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ثا}$$

$$= (\text{س}-1)\ \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ثا}$$

والمعلوم ان مشتق هاته العبارة هي : $\text{س}\ \text{هـ}^{\text{س}}$

ولنضرب مثالا ثانيا : $\text{كا}\ \text{خوس}\ \text{فاس}$

فلنضع : $\left\{\begin{array}{l}\text{ض} = \text{خوس} \\ \text{فاظ} = \text{فاس}\end{array}\right.$ ومنها $\left\{\begin{array}{l}\text{فاض} = \dfrac{\text{فاس}}{\text{س}} \\ \text{ظ} = \text{س}\end{array}\right.$

واذا طبقنا القاعدة المذكورة حصل :

$$\text{كا}\ \text{خوس}\ \text{فاس} = \text{س}\ \text{خوس} - \text{كا}\ \text{فاس}$$

$$= \text{س}\ \text{خوس} - \text{س} + \text{ثا}$$

٣) تبديل المتحولات :

لقد سنا ان تبديل المتحولات فى المعادلات يغير شكلها وبالتالى نستطيع ان نختار تبديلا خاصا لكل حالة حتى يصبح شكل المعادلة بسيطا كى يقع تكامله حسب القواعد المدروسة .
ومثل ذلك :

$$\text{ك} = \text{كا}\ \frac{2\text{س}\ \text{فاس}}{\text{س}^2+\text{ب}} \quad ، \quad (\text{ب}: \text{ثابت})$$

والمعلوم ان $\text{فا}\,(\text{س}^2) = 2\,\text{س}\,\text{فاس}$

فيظهر أن الدالة التكاملية لا تتغير حسب س ولكن حسب س^2

فلنضع $\text{ض} = \text{س}^2$ ونستخلص : $\text{ك} = \text{كا}\,\dfrac{\text{فاض}}{\text{ض}+\text{ب}}$ الذى درسناه سابقا

$$\text{ك} = \text{خو}\,|\text{ض}+\text{ب}| + \text{ثا}$$

واذا رجعنا الى المتحول الاصلى س

$$\text{ك} = \text{خو}\,|\text{س}^2+\text{ب}| + \text{ثا}$$

(٢) تحويل الكسر المنطق الى عناصر بسيطة

$$\text{ك} = \text{كا}\,\frac{\text{ض}(\text{س})}{\text{ظ}(\text{س})}\,\text{فاس}$$

حيث $\text{ض}(\text{س})$ و $\text{ظ}(\text{س})$ كثيرتى حدود فينبغى علينا تحويل كسرهما الى عناصر بسيطة .

ومثل ذلك :

$$\text{ك} = \text{كا}\,\frac{\text{فاس}}{\text{س}^2-1}$$

والمعلوم أن $\text{س}^2-1 = (\text{س}-1)(\text{س}+1)$ فنبحث الآن على الثابتين ب ، ت التى تحقق العلاقة :

$$\frac{1}{\text{س}^2-1} = \frac{\text{ب}}{\text{س}-1} + \frac{\text{ت}}{\text{س}+1}$$

$$\frac{1}{\text{س}^2-1} = \frac{\text{ب}(\text{س}+1)+\text{ت}(\text{س}-1)}{\text{س}^2-1}$$

$$1 \equiv \text{ب}\,\text{س} + \text{ب} + \text{ت}\,\text{س} - \text{ت}$$

$$1 \equiv (\text{ب}-\text{ت}) + \text{س}(\text{ب}+\text{ت})$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{ب}-\text{ت} = 1\\ \text{ب}+\text{ت} = 0\end{array}\right\} \quad \text{ومنه} \quad \left\{\begin{array}{l}\text{ب} = \frac{1}{2}\\ \text{ت} = -\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\text{ك} = \text{كا}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\text{س}-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{\text{س}+1}\right)\text{فاس}$$

$$\text{ك} = \frac{1}{2}\text{كا}\,\frac{\text{فاس}}{\text{س}-1} - \frac{1}{2}\text{كا}\,\frac{\text{فاس}}{\text{س}+1}$$

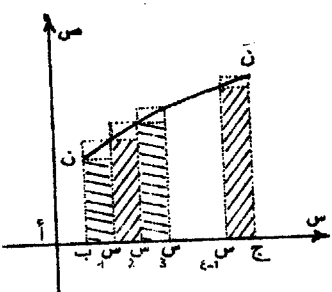
$$\text{ك} = \frac{1}{2}\,\text{خو}\,|\text{س}-1| - \frac{1}{2}\,\text{خو}\,|\text{س}+1| + \text{ثا}$$

$$\text{ك} = \frac{1}{2}\,\text{خو}\,\left|\frac{\text{س}-1}{\text{س}+1}\right| + \text{ثا}$$

التكامل المحدود

فلنعتبر الدالة ص (س) فى المجال (ب، ج) الذى نقسمه الى عدة اقسام حيث تتبين مساحتان :

$$\begin{cases} م_1 = (\text{س}_1 - \text{ب})\ \text{ص}(\text{ب}) + (\text{س}_2 - \text{س}_1)\ \text{ص}(\text{س}_1) + \ldots\ldots \\ م_2 = (\text{س}_1 - \text{ب})\ \text{ص}(\text{س}_1) + (\text{س}_2 - \text{س}_1)\ \text{ص}(\text{س}_2) + \ldots\ldots \end{cases}$$



2.6

واذا سمينا م المساحة المحصورة بين أَس والخط البيانى للدالة ص(س) والعمودين ب ن و ج نَ حصلت العلاقة : (2.6)

$$م_1 < م < م_2$$

فاذا كثرنا فى عدد أقسام المجال (ب،ج) حتى ينتهى عددها الى ما لا نهاية له فينتهى $م_1$ و $م_2$ الى م التى هي : $\text{كا}_{\text{ب}}^{\text{ج}}\ \text{ص}(\text{س})\ \text{فاس}$ ونسميها التكامل المحدود .

ويدلنا هذا البيان الهندسى الى أن :

$$\text{كا}_{\text{ب}}^{\text{ج}}\ \text{ص}(\text{س})\ \text{فاس} + \text{كا}_{\text{ج}}^{\text{ب}}\ \text{ص}(\text{س})\ \text{فاس} = 0$$

اى أن :

$$\text{كا}_{\text{ب}}^{\text{ج}}\ \text{ص}(\text{س})\ \text{فاس} = -\,\text{كا}_{\text{ج}}^{\text{ب}}\ \text{ص}(\text{س})\ \text{فاس}$$

وكذلك :

$$\text{كا}_{\text{ب}}^{\text{ج}}\ \text{ص}(\text{س})\ \text{فاس} = \text{كا}_{\text{ب}}^{\text{د}}\ \text{ص}(\text{س})\ \text{فاس} + \text{كا}_{\text{د}}^{\text{ج}}\ \text{ص}(\text{س})\ \text{فاس}$$

واذا كانت صَ (س) هي قيمة كا ص (س) فاس، فنكتب ·

$$\text{كا}_{ب}^{ج}\,\text{ص(س) فاس} = \text{صَ(ج)} - \text{صَ(ب)}$$

4. صيغة وليس WALLIS

فلنبحث عن قيمة التكاملين :

$$\text{ج}_{ع} = \text{كا}_{0}^{\frac{\pi}{2}}\,\text{جا}^{ع}\text{س فاس}$$

$$\text{جَ}_{ع} = \text{كا}_{0}^{\frac{\pi}{2}}\,\text{جتا}^{ع}\text{س فاس}$$

والمعلوم ان هذين التكاملين متساويان وان الدالتين ص = $\text{جا}^{ع}$س و ص = $\text{جتا}^{ع}$س متناظرتان بالنسبة للعمود س = $\frac{\pi}{4}$ فلنطبق قاعدة التكامل بالتجزئة :

$$\text{ج}_{ع} = \text{كا}_{0}^{\frac{\pi}{2}}\,\text{جا}^{ع-1}\text{س فا(-جتاس)}$$

$$\text{ج}_{ع} = -\left|\text{جا}^{ع-1}\text{س . جتاس}\right|_{0}^{\frac{\pi}{2}} + \text{كا}_{0}^{\frac{\pi}{2}}\,\text{جتاس فا(جا}^{ع-1}\text{س)}$$

وان العبارة $\left|\text{جا}^{ع-1}\text{س.جتاس}\right|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ تساوى صفراً فنحصل العلاقة :

$$\text{ج}_{ع} = \text{كا}_{0}^{\frac{\pi}{2}}\,\text{جا}^{ع-1}\text{س فا(-جتاس)} = \text{كا}_{0}^{\frac{\pi}{2}}\,\text{جتاس فا(جا}^{ع-1}\text{س)}$$

$$\text{ج}_{ع} = (ع-1)\,\text{كا}_{0}^{\frac{\pi}{2}}\,\text{جا}^{ع-2}\text{س جتاس فاس}$$

$$(ع-1)\,\text{ج}_{ع} = (ع-1)\,\text{كا}_{0}^{\frac{\pi}{2}}\,\text{جا}^{ع-2}\text{س جا}^{2}\text{س فاس}$$

$$ع\,\text{ج}_{ع} = (ع-1)\,\text{ج}_{ع-2}$$

وتوجد حالتان اما ع = 2ت وهي زوجية او ع = 2ت + 1 وهي فردية .

ففى الحالة الاولى ع = 2 ت نكتب :

$$2\text{ت}\ \text{ج}_{2\text{ت}} = (2\text{ت}-1)\ \text{ج}_{2\text{ت}-2}$$
$$(2\text{ت}-2)\ \text{ج}_{2\text{ت}-2} = (2\text{ت}-3)\ \text{ج}_{2\text{ت}-4}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$4\ \text{ج}_4 = 3\ \text{ج}_2$$
$$2\ \text{ج}_2 = \text{ج}_0 \qquad \text{و}\ \text{ج}_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{فاس} = \frac{\pi}{2}$$

$$2.4\ldots 2\text{ت}\ \text{ج}_{2\text{ت}} = \frac{\pi}{2}.1.3.5\ldots\ldots(2\text{ت}-1)$$
$$\text{ج}_{2\text{ت}} = \frac{\pi}{2}\ \frac{1.3.5\ldots\ldots(2\text{ت}-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2\text{ت}}$$

وفى الحالة الثانية ع = 2 ت + 1

$$(2\text{ت}+1)\ \text{ج}_{2\text{ت}+1} = 2\text{ت}\ \text{ج}_{2\text{ت}-1}$$
$$(2\text{ت}-1)\ \text{ج}_{2\text{ت}-1} = (2\text{ت}-2)\ \text{ج}_{2\text{ت}-3}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$3\ \text{ج}_3 = \text{ج}_1 \qquad \text{و}\ \text{ج}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جاس فاس} = 1$$

$$1.3.5\ldots(2\text{ت}+1)\ \text{ج}_{2\text{ت}+1} = 2.4.6\ldots\ldots 2\text{ت}$$
$$\text{ج}_{2\text{ت}+1} = \frac{2.4.6\ldots 2\text{ت}}{1.3.5\ldots(2\text{ت}+1)}$$

والمعلوم ان فى المجال $(0 ، \frac{\pi}{2})$ تنحصر قيمة الدالة جاس بين (0 و1) فنستخلص :

$$\text{جا}^{2\text{ت}}\text{س} > \text{جا}^{2\text{ت}+1}\text{س} > \text{جا}^{2\text{ت}+2}\text{س}$$
$$\text{ج}_{2\text{ت}} > \text{ج}_{2\text{ت}+1} > \text{ج}_{2\text{ت}+2}$$
$$1 > \frac{\text{ج}_{2\text{ت}+1}}{\text{ج}_{2\text{ت}}} > \frac{\text{ج}_{2\text{ت}+2}}{\text{ج}_{2\text{ت}}}$$

ولكننا نعلم ان $\frac{\text{ج}_{2\text{ت}+1}}{\text{ج}_{2\text{ت}}} = \frac{2\text{ت}+1}{2\text{ت}+2} \xrightarrow[\text{ت}\to\infty]{} 1$

فنستخلص أن

$$\frac{\text{ج}_{2\text{ت}+1}}{\text{ج}_{2\text{ت}}} \xrightarrow[\text{ت}\to\infty]{} 1$$

فنستطيع ان نكتب :

$$\frac{\text{ج}_{2\text{ت}+1}}{\text{ج}_{2\text{ت}}} = 1 + \text{و}$$ ("و" قيمة قريبة من الصفر).

ونستخلص من ذلك قيمة π :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{(2.4.6\ldots\ldots2\text{ت})^2}{(1.3.5\ldots\ldots2\text{ت}-1)^2(2\text{ت}+1)}(1+\text{و})$$ وهذه هي صيغة وَلِيس .

• صيغة ستيرلنغ •

فلنضع $\text{ع}! = \text{ع}^{\text{ع}} e^{-\text{ع}} \sqrt{\text{ع}}\, \text{ص}(\text{ع})$ وسنبين أن $\text{ص}(\text{ع}) \xrightarrow[\text{ع}\to\infty]{}$ حد معين .

$$(\text{ع}+1)! = (\text{ع}+1)^{\text{ع}+1} e^{-(\text{ع}+1)} \sqrt{\text{ع}+1}\; \text{ص}(\text{ع}+1)$$

$$\frac{\text{ص}(\text{ع}+1)}{\text{ص}(\text{ع})} = e\left(\frac{\text{ع}}{\text{ع}+1}\right)^{\text{ع}+\frac{1}{2}}$$

$$\text{خو}\frac{\text{ص}(\text{ع}+1)}{\text{ص}(\text{ع})} = 1 - \left(\text{ع}+\frac{1}{2}\right)\text{خو}\left(1+\frac{1}{\text{ع}}\right)$$

والمعلوم أن : $\text{خو}(1+\text{س}) = \text{س} - \frac{\text{س}^2}{2} + \ldots\ldots + (-1)^{\text{ع}+1}\frac{\text{س}^{\text{ع}}}{\text{ع}}$

$$\text{خو}\left[\text{ص}(\text{ع}+1)\right] - \text{خو}\left[\text{ص}(\text{ع})\right] = 1 - \left(\text{ع}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\text{ع}} - \frac{1}{2\text{ع}^2} + \frac{1}{3\text{ع}^3} - \ldots\ldots\right)$$

وان العبارة العامة للمتسلسلة متقاربة $\text{ض}_{\text{ع}}$

$\text{ض}_{\text{ع}} = \text{خو}\left[\text{ص}(\text{ع}+1)\right] - \text{خو}\left[\text{ص}(\text{ع})\right]$ إذ أن:

$$\text{ض}_{\text{ع}} = -\frac{1}{12\text{ع}^2} + \frac{1}{12\text{ع}^3} + \ldots\ldots$$

وهذا يدل على ان $ع^{\frac{1}{2}} \cdot |ض(ع)| \xrightarrow[ع \to \infty]{} حدّ$ ومنها خو $\left[\frac{ص(ع)}{ص(ع+1)}\right]$

وكذلك $ص(ع+1)$ أوص$(ع)$ تنتهى كلها الى حد "د" فتصبح العلاقة :

$$ع! \longrightarrow د \cdot ع^{ع} \cdot e^{-ع} \cdot \sqrt{ع}$$

فلنبحث على قيمة "د" بفضل صيغة وليش فان الدالة :

$$ضَ(ع) = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots\cdots 2ع}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots\cdots (2ع-1)\sqrt{2ع+1}} \xrightarrow[ع \to \infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

واذا ضربنا أعلى الكسر وأسفله بـ $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots\cdots 2ع$ يظهر فى البسط :

$$(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots\cdots 2ع)^2 = 2^{2ع} \cdot (ع!)^2$$

ويظهر فى المقام : $(2ع)! \cdot \sqrt{2ع+1}$

واذا عوضنا $ع!$ بقيمتها وكذلك $(2ع)!$ تحصل العلاقة : $\frac{د \cdot ع}{\sqrt{2ع(2ع+1)}}$

وتنتهى هذه العبارة الى $\frac{د}{2}$ لمّا $ع \longrightarrow \infty$

ولكننا نعلم أن $ضَ(ع) \xrightarrow[ع \to \infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ فتحصل العلاقة : $د = \sqrt{2\pi}$

فنكتب اذن :

$$ع! = ع^{ع} \cdot e^{-ع} \sqrt{2\pi ع}$$

وهى صيغة ستيرلنق.

تمارين

1. احسب التكاملات الاتية : $\int_{0}^{1} \text{س فاس}$ ، $\int_{1}^{-1} \text{س}^{2}\ \text{فاس}$ ، $\int_{0}^{1} e^{-\text{س}}\ \text{فاس}$

2. نفس السؤال : $\int_{1}^{e} \frac{\text{فاس}}{\text{س}}$ ، $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{ظاس فاس}$ ، $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{جا}\left(\text{س}+\frac{\pi}{4}\right)\text{فاس}$

3. احسب : $\int \frac{\text{فاس}}{(\text{س}+2)^{4}}$

4. احسب $\int \frac{\text{س فاس}}{\text{س}+1}$

5. نفس السؤال : $\int \frac{\text{س فاس}}{\text{س}^{3}-1}$

6. $\int \text{س}^{2} e^{\text{س}}\ \text{فاس}$

7. $\int \frac{\text{فاس}}{1+e^{\text{س}}}$

8. $\int \text{س خوس فاس}$

9. $\int \text{جا}^{2}\text{س فاس}$

10. $\int \text{قوس ظاس فاس}$

11. $\text{ك} = \int e^{\text{س}}\ \text{جاس فاس}$ ، $\text{ل} = \int e^{\text{س}}\ \text{جتاس فاس}$

12. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جاس جتاس فاس}$

13. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{س}^{2}\ \text{جاس فاس}$

14. $\int_{1}^{e} \sqrt{\text{س}}\ \text{خوس فاس}$

15. $\int_{1}^{e} \text{س}\ (\text{خوس})^{2}\ \text{فاس}$

الفصل السابع

المعادلات التفاضلية

تعرف المعادلات التفاضلية ذات الدرجة ع بعلاقة تربط المتحول والدالة ومشتقاتها الى الدرجة

ض (س ، ص ، ص′ ، ص″ ، ... ، ص^(ع)) = 0 (1)

فاذا وجدنا دالة ص = ص (س) التي وفرت الشرط ض = 0 نقول ان ص (س) هي تكامل ض أو حل المعادلة التفاضلية (1) ويكون الخط البياني لهاته الدالة ص (س) الخط التفاضلي .

ومثل ذلك : ص′ = ب (ب : ثابت)

ان هاته المعادلة ص′ − ب = 0 معادلة تفاضلية بسيطة من الدرجه الاولى . فنكتب :

فاص / فاس = ب

فاص = ب . فاس   كا فاص = كا ب فاس

ص = ب س + ثا

ذلك هو تكامل المعادلة التفاضلية والمعلوم ان خطها البياني مستقيم .

1) المعادلات التفاضلية من الدرجة الاولى

ان المعادلات من الدرجة الاولى تكتب على الصيغة الآتية :

$$ض\,(س، ص، ص')=0$$

ولا نبحث فى هذا الفصل عن حلول هاته المعادلة الا فى حالات خاصة .

1) معادلات ذات المتحولات قابلة الفصل :

وهى معادلات على الصيغة الآتية : $ص' = ف(س) . ق(ص)$ وتكتب .

$$\frac{فاص}{فاس} = ف(س) . ق(ص)$$

$$\frac{فاص}{ق(ص)} = ف(س)\ فاس$$

ولا يتحول النصف الاول الا حسب ص والنصف الثاني الا حسب س فتوفر هكذا فصل المتحولات .

$$\int \frac{فاص}{ق(ص)} = \int ف(س) . فاس$$

أى : $\bar{ق}(ص) = \bar{ف}(س) + ثا$

ومثل ذلك : $ص . ص' = ب$

$$ص . \frac{فاص}{فاس} = ب$$

واذا فصلنا المتحولات حصل :

$$ص . فاص = ب . فاس$$

$$\frac{1}{2}ص^2 = ب . س + ثا$$

هذا هو الحل وتمثل خطوطه التكاملية بقطوع مكافئة ذات المحاور الافقية.

2) المعادلات المجانسة :

فهى المعادلات التى تعبر فيها $ص'$ بالنسبة للقسمة $\frac{ص}{س}$

$$ص' = ف(\frac{ص}{س})$$

$$\frac{فا ص}{فا س} = ف(\frac{ص}{س})$$

ويرجع حل هذه المعادلة الى حل معادلة تكاملية ذات المتحولات قابلة الفصل وذلك على النحو الآتى :

فلنفترض $ض = \frac{ص}{س}$ التى تكتب $ص = س.ض$ ونستخلص $ص' = س ض' + ض$

وتكتب المعادلة التكاملية :

$$س ض' + ض = ف (ض)$$

$$س ض' = ف (ض) - ض$$

$$ض' = \frac{1}{س} (ف (ض) - ض)$$

ولنفرض : $ف (ض) - ض = ق (ض)$

فنكتب : $ض' = \frac{1}{س} ق (ض)$

$$\frac{فا ض}{ق (ض)} = \frac{فا س}{س}$$

وهى معادلة ذات المتحولات المنفصلة ومثال ذلك : $س ص' - 5 س - ص = 0$

$$\frac{فا ص}{فا س} = \frac{ص}{س} + 5$$

فلنضع : $ص = س . ض$

$$\frac{ص}{س} + 5 = ض + 5$$

$$\frac{فا ص}{فا س} = \frac{س فا ض}{فا س} + ض$$

$$ض + 5 = س \frac{فا ض}{فا س} + ض$$

واذا فصلنا المتحولات : $فا ض = 5 \frac{فا س}{س}$

$$ض = 5 خو س + ثا$$

فلنرجع الى المتحول الاول ص: $\frac{ص}{س} = 5 خو س + ثا$

$$ص = 5 س خو س + ثا س$$

٢) المعادلات من الدرجة الأولى :

وهى معادلة من الدرجة الاولى بالنسبة لِـ ص و صَ فنكتبها على الشكل الآتى :

$$\text{ب}(\text{س}).\text{ص}' + \text{ت}(\text{س}).\text{ص} = \text{ث}(\text{س})$$

فلننظر الى الحالات الخاصة الآتية :

أ) ث (س) = ٥

فيبقى : $$\text{ب}(\text{س})\,\frac{\text{فاص}}{\text{فاس}} + \text{ت}(\text{س}).\text{ص} = 0$$

ونستخلص من ذلك : $$\frac{\text{فاص}}{\text{ص}} = -\frac{\text{ت}(\text{س})}{\text{ب}(\text{س})}\,\text{فاس}$$

وهى معادلة تفاضلية ذات المتحولات المنفصلة ومثال ذلك :

$$\text{س ص}' + 2\,\frac{\text{ص}}{\text{س}} = 0$$

$$\text{س}\,\frac{\text{فاص}}{\text{فاس}} = -2\,\frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

$$\frac{\text{فاص}}{\text{ص}} = -2\,\frac{\text{فاس}}{\text{س}^2}$$

$$\text{لو}\,|\text{ص}| = \frac{2}{\text{س}} + \text{ثا}$$

$$\text{ص} = \text{ثا}'.e^{\frac{2}{\text{س}}}$$

ب) ت (س) = ٥

$$\text{ب}(\text{س})\,\frac{\text{فاص}}{\text{فاس}} = \text{ث}(\text{س})$$

$$\text{فاص} = \frac{\text{ث}(\text{س})}{\text{ب}(\text{س})}\,\text{فاس}$$

وهى معادلة تفاضلية ذات المتحولات المفصولة ويسهل حلها كما ذكرنا سابقا .

ج) الحالة العامة

نفترض أن الدالة المجهولة "ص" تتركب من ضرب دالتين ض(س) و ظ(س)

فنكتب :

$$\text{ص}(\text{س}) = \text{ض}(\text{س}).\text{ظ}(\text{س})$$

$$\text{ص}' = \text{ض}'.\text{ظ} + \text{ض}.\text{ظ}'$$

وتكتب المعادلة المدروسة :

$$ب(س).ص' + ت(س).ص = ث(س)$$

$$ب(س)\left[ض'.ظ + ض.ظ'\right] + ت(س).ض.ظ = ث(س)$$

$$ب(س).ض.ظ' + ظ\left[ب(س).ض' + ت(س).ض\right] = ث(س)$$

فنختار الآن ض و ظ حيث أن تتوفر المعادلة : $ب(س).ض' + ت(س).ض = 0$

فيحصل : $\frac{فا\ ض}{ض} = -\frac{ت(س)}{ب(س)}.فا\ س$

$$خو|ض| = -كا\ \frac{ت(س)}{ب(س)}.فا\ س$$

وهذا يضبط لنا الدالة ض فيصبح وجود ظ بسيطا .

$$ب(س).ض.ظ' = ث(س)$$

$$ب(س).ض.\frac{فا\ ظ}{فا\ س} = ث(س)$$

$$فا\ ظ = \frac{ث(س)}{ب(س).ض(س)}.فا\ س$$

$$ظ = كا\ \frac{ث(س)}{ب(س).ض(س)}.فا\ س$$

ملاحظة :

اذا كنا نعلم حلا خاصا $ص_1$ للمعادلة التفاضلية نستطيع حلها بواسطة تكامل واحد .

$$-\begin{cases} ب(س).ص_1' + ت(س).ص_1 = ث(س) \\ ب(س).ص' + ت(س).ص = ث(س) \end{cases}$$

$$ب(س)\left(ص_1 - ص\right)' + ت(س)\left(ص_1 - ص\right) = 0$$

فلنضع $ق = ص_1 - ص$ فتصبح المعادلة : $ب(س).\frac{فا\ ق}{فا\ س} + ت(س).ق = 0$

أي : $\frac{فا\ ق}{ق} = -\frac{ت(س)}{ب(س)}.فا\ س$ التي سبق حلها .

٢) المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية

وهي المعادلات على الصيغة الآتية : $ض(س ، ص ، ص' ، ص'') = 0$

ولا ندرس الا حالات خاصة جدا .

١) المتحول "ص" مفقود

فيصبح شكل المعادلة $ض(س ، ص' ، ص'') = 0$ فنضع $ص' = ف$

فتصبح المعادلة $ض(س ، ف ، ف') = 0$ وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الاولى بالنسبة لـ "ف"

فنجد مثلا $ف = ف(س ، ثا)$ التي تكتب :

$$\frac{فا ص}{فا س} = ف(س ، ثا)$$

$$ص = \int ف(س ، ثا) فا س + ثَا$$

٢) المتحول "س" مفقود

فتصبح المعادلة $ض(ص ، ص' ، ص'') = 0$ ونعتبر ص هو المتحول وتصبح $ص'$ الدالة بالنسبة لـ ص، فنكتب :

$$ص' = ف(ص)$$

$$\frac{فاض}{فاس} = \frac{فاف}{فاص} \cdot \frac{فاص}{فاس}$$

$$ص'' = \frac{فاف}{فاص} \cdot ف(ص)$$

وتصبح المعادلة التفاضلية من الدرجة الاولى بالنسبة للدالة $ف(ص)$ فنجد الحل مثلا :

$$ف = ف(ص ، ثا)$$

$$\frac{فاص}{فاس} = ف(ص ، ثا)$$

$$فاس = \frac{فا ص}{ف(ص ، ثا)}$$

$$س = \int \frac{فا ص}{ف(ص ، ثا)} + ثا$$

٣) المتحولان "س" و "صَ" مفقودان :

فتصبح المعادلة ض (ص، ص") = ٥ فلنضع ص" = ظ (ص)

ولنضرب هذه المعادلة بـ ص' :

$$\text{ص}''\,.\,\text{ص}' = \text{ظ}\,(\text{ص})\,.\,\text{ص}'$$

$$\text{ص}'\,.\,\frac{\text{فاص}'}{\text{فاس}} = \text{ظ}\,(\text{ص})\,.\,\frac{\text{فاص}}{\text{فاس}}$$

$$\text{ص}'\,.\,\text{فاص}' = \text{ظ}\,(\text{ص})\,.\,\text{فاص}$$

$$\frac{1}{2}\,\text{ص}'^{2} = \text{كا}\ \text{ظ}\,(\text{ص})\,.\,\text{فاص} + \text{ثا}$$

فنستنتج علاقة ص' بـ ص ونستطيع ان نضعها على الشكل الآتي :

$$\text{ص}' = \bar{\text{ظ}}\,(\text{ص، ثا})$$

فيبقى حل المعادلة التفاضلية :

$$\frac{\text{فاص}}{\text{فاس}} = \text{ظ}\,(\text{ص، ثا})$$

فنستنتج الحل النهائي :

$$\text{س} = \text{كا}\,\frac{\text{فاص}}{\text{ظ}\,(\text{ص،ثا})} + \bar{\text{ثا}}$$

٤) المعادلات التفاضلية على الشكل ص" = ض (س) . ظ (ص')

اذا ضربنا طرفي المعادلة بـ "ص'" حصلت النتيجة الآتية :

$$\text{ص}'\,.\,\text{ص}'' = \text{ص}'\ \text{ض}\,(\text{س})\,.\,\text{ظ}\,(\text{ص}')$$

$$\frac{\text{ص}'}{\text{ظ}\,(\text{ص}')}\,.\,\text{فاص}' = \text{ض}\,(\text{س})\,.\,\text{فاص}$$

واذا كاملنا هذه المعادلة حصلت لنا معادلة تفاضلية بالنسبة لـ "ص" و "ص'" ويكون حلها على النحو الذي سبق بيانه

٥) المعادلة التفاضلية ذات العناصر من الدرجة الاولى

ويكون شكل هذه المعادلة : $\text{ب}_{0}\,(\text{س})\,.\,\text{ص}'' + \text{ب}_{1}\,(\text{س})\,.\,\text{ص}' + \text{ب}_{2}\,(\text{س})\,.\,\text{ص} = \text{ب}_{3}\,(\text{س})$

ويتركب الحل العام لهذه المعادلة من جمع حلّين : ص_0 و ص_1 حيث أن :

$\text{ص} = \text{ص}_0 + \text{ص}_1$ وتكون الدالة "ص_0" حلا خاصا للمعادلة المذكورة و ص_1 الحل العام لنفس المعادلة بلا طرف ثان : $\text{ب}_0(\text{س}).\text{ص}''_1 + \text{ب}_1(\text{س}).\text{ص}'_1 + \text{ب}_2(\text{س}).\text{ص}_1 = 0$.

وينجزأ حل هذه المعادلة الى مرحلتين :

– أما في المرحلة الاولى فينبغي علينا ان نجد حلا خاصا ص_0 مبدئيا على التجربة والاختبار

– أما في المرحلة الثانية فينبغي علينا ان نبحث عن الحل ص_1 ولا ندرس هذا البحث الا في حالة تكون فيها ب_0 و ب_1 و ب_2 ثوابت فلنفترض :

$$\begin{cases} \text{ب}_0 = \text{با}_0 \\ \text{ب}_1 = \text{با}_1 \\ \text{ب}_2 = \text{با}_2 \end{cases}$$

وهي ثلاثة ثوابت

وتصبح المعادلة : $\text{با}_0\, \text{ص}''_1 + \text{با}_1\, \text{ص}'_1 + \text{با}_2\, \text{ص}_1 = 0$

ولنبحث عن حلين خاصين مستقلين على الشكل : $\text{ص} = e^{\text{و}\text{س}}$ (و ثابت)

واذا عوضنا ص في المعادلة التفاضلية بحلها المذكور وجدنا :

$$e^{\text{و}\text{س}}\left(\text{با}_0\, \text{و}^2 + \text{با}_1\, \text{و} + \text{با}_2\right) = 0$$

أي أن المعادلة المميزة تساوي صفرا :

$$\text{با}_0\, \text{و}^2 + \text{با}_1\, \text{و} + \text{با}_2 = 0$$

فان لهاته المعادلة حلّين : و_1 ، و_2 ويكون حل المعادلة التفاضلية .

$$\text{ص} = \text{ثا}_1\, e^{\text{و}_1\text{س}} + \text{ثا}_2\, e^{\text{و}_2\text{س}}$$

واذا كان للمعادلة المميزة حلا مزدوجا و_3 فيكون حل المعادلة التفاضلية :

$$\text{ص} = \left(\text{ثا}_1\, \text{س} + \text{ثا}_2\right) e^{\text{و}_3\text{س}}$$

تمارين

1. فلنفترض مجموعة القطوع المتكافئة : ص = ب س^2 + س (ب : ثابت)
ابحث عن المعادلة التفاضلية لهذه الخطوط البيانية .

2. حل المعادلات التفاضلية الآتية :
ص$'$ − جتا س = 0 وَ س ص$'$ = 1

3. ص ص$'$ = س وَ ص ص$'$ = $e^{\text{س}}$

4. ص + س^2 ص$'$ = 0 وَ ص$'$ − (1 − $\frac{2}{\text{س}^2}$) ص = 0

5. ص ص$'$ + جا س = 0

6. ص$'$ (س^2 + ص^2 − س ص) = 0

7. س ص$'$ − 2 ص + س = 0

8. س ص$'$ − ص = − حتوس

9. ص$'$ جا س − جا^2 س = ص جتا س

10. ص$'$ + ص − س ص^3 = 0 (ضع ض = $\frac{1}{\text{ص}^2}$)

11. 2 س ص$'$ + ص + 3 س^2 ص^2 = 0 (ضع ض = $\frac{1}{\text{ص}}$)

12. س ص$''$ − ص$'$ = 0

13. ص$''$ − 3 ص$'$ + 2 ص = س^2

14. ص$''$ − 2 ص$'$ + 5 ص = 2 جا س

15. ابحث عن حل المعادلة التفاضلية :
ص$'$ − 3 ص = $e^{3\text{س}}$ الذى يوافق ص (0) = 1

16. ابحث عن الحل العام بمعادلة التفاضلية :
ص$''$ + 4 ص = 0 الذى يوافق
ص ($\frac{\pi}{2}$) = 1
ص ($\frac{\pi}{4}$) = 1

جدول العلاقات المألوفة

1. حساب المثلثات :

$$\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} = 1$$

$$1 + \text{ظا}^2\text{س} = \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}}$$

$$\text{جا}(\text{هـ}+\text{و}) = \text{جاهـ جتاو} + \text{جاو جتاهـ}$$

$$\text{جتا}(\text{هـ}+\text{و}) = \text{جتاهـ جتاو} - \text{جاهـ جاو}$$

$$\text{ظا}2\text{هـ} = \frac{2\text{ظاهـ}}{(1-\text{ظا}^2\text{هـ})}$$

$$\text{جاهـ} + \text{جاو} = 2\,\text{جا}\frac{(\text{هـ}+\text{و})}{2}.\,\text{جتا}\frac{(\text{هـ}-\text{و})}{2}$$

$$\text{جاهـ} - \text{جاو} = 2\,\text{جا}\frac{(\text{هـ}-\text{و})}{2}.\,\text{جتا}\frac{(\text{هـ}+\text{و})}{2}$$

$$\text{جتاهـ} + \text{جتاو} = 2\,\text{جتا}\frac{(\text{هـ}+\text{و})}{2}.\,\text{جتا}\frac{(\text{هـ}-\text{و})}{2}$$

$$\text{جتاهـ} - \text{جتاو} = -2\,\text{جا}\frac{\text{هـ}+\text{و}}{2}.\,\text{جا}\frac{\text{هـ}-\text{و}}{2}$$

$$\text{جاهـ} = \frac{2\,\text{ظا}\frac{\text{هـ}}{2}}{1+\text{ظا}^2\frac{\text{هـ}}{2}}$$

$$\text{جتاهـ} = \frac{1-\text{ظا}^2\frac{\text{هـ}}{2}}{1+\text{ظا}^2\frac{\text{هـ}}{2}}$$

2. الحساب الخوارزمي :

$$\text{س} = e^{\text{ص}} \longleftrightarrow \text{ص} = \text{خو}_e\,\text{س}$$

$$\text{س} = 10^{\text{ص}} \longleftrightarrow \text{ص} = \text{خو}_{10}\,\text{س}$$

$\text{خوس} = 2{,}30 \ \text{خو}_{10}\text{س}$

$\text{خو}_{10}\text{س} = 0{,}43 \ \text{خوس}$

$\text{خو}(\text{ب}\times\text{ت}) = \text{خوب} + \text{خوت}$

$\text{خو}\frac{\text{ب}}{\text{ت}} = \text{خوب} - \text{خوت}$

$\text{خوس}^{\text{ع}} = \text{ع خوس}$

3. الحساب التفاضلي والتكاملي

الدالّة	التفاضل	التكامل
$\text{ص} = \text{س}^{\text{ع}}$	$\text{ع ص}^{\text{ع}-1}$	$\frac{1}{\text{ع}+1}\text{س}^{\text{ع}+1} + \text{ثا}$
$\text{ص} = e^{\text{س}}$	$e^{\text{س}}$	$e^{\text{س}} + \text{ثا}$
$\text{ص} = \text{خوس}$	$\frac{1}{\text{س}}$	$\text{س}(\text{خوس}+1) + \text{ثا}$
$\text{ص} = \text{جاس}$	جتا س	$-\text{جتا س} + \text{ثا}$
$\text{ص} = \text{جتاس}$	$-\text{جاس}$	$\text{جاس} + \text{ثا}$
$\text{ص} = \text{ض}\times\text{ظ}$	$\text{ض}'\text{ظ} + \text{ض}\text{ظ}'$	$\int \text{ض فاظ} = \text{ضظ} - \int \text{ظ فاض}$
$\text{ص} = \frac{\text{ض}}{\text{ظ}}$	$\frac{\text{ض}'\text{ظ} - \text{ض}\text{ظ}'}{\text{ظ}^2}$	
	$\text{ص}'_{\text{س}} = \text{ص}'_{\text{ض}} \times \text{ض}'_{\text{س}}$	
	$\text{ص}'_{\text{س}} \times \text{س}'_{\text{ص}} = 1$	
جتق س	جق س	جق س
جق س	جتق س	جتق س
ظق س	$\frac{1}{\text{جتق}^2\text{س}}$	

$\frac{1}{\sqrt{1-\text{س}^2}}$ $(\lvert\text{س}\rvert<1)$	قوس جا س أو ـ قوس جتا س
$\frac{1}{1+\text{س}^2}$	قوس ظا س
$\frac{1}{\sqrt{1+\text{س}^2}}$	قوس جق س $=$ خو $\left(\text{س}+\sqrt{1+\text{س}^2}\right)$
$\frac{1}{\sqrt{\text{س}^2-1}}$ $(\text{س}>1)$	قوس جتق س $=$ خو $\left(\text{س}+\sqrt{\text{س}^2-1}\right)$
$\frac{1}{1-\text{س}^2}$ $(\lvert\text{س}\rvert<1)$	قوس ظق س $= \frac{1}{2}$ خو $\left(\frac{1+\text{س}}{1-\text{س}}\right)$

٤. النشر المحدود :

$$\text{ص}(\text{س}) = \text{ص}(0) + \frac{\text{س}}{1!}\text{ص}'(0) + \frac{\text{س}^2}{2!}\text{ص}''(0) + \ldots\ldots + \frac{\text{س}^{\text{ع}}}{\text{ع}!}\text{ص}^{\text{ع}}(0) + \ldots\ldots$$

لما ينتهي س إلى صفر :

$$\text{جا س} \simeq \text{س}$$

$$\text{جتا س} \simeq 1 - \frac{\text{س}^2}{2}$$

$$\frac{1}{1-\text{س}} \simeq 1+\text{س}$$

$$\frac{1}{1+\text{س}} \simeq 1-\text{س}$$

الفهـــرس